

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat,
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non -
profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its
applications, and is sponsored by the Netherlands Government through
the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research
(Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research
in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by
several industries.

MC SYLLABUS

3.3

MC SYLLABUS

3.3

RANDWAARDE PROBLEMEN

DEEL 3

DOOR

H.A. LAUWERIER

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

1968

Inhoud

	blz.
Inleiding	3
1. Laplace transformatie	4
2. De trillende snaar	13
3. Warmtegeleiding	18
4. Asymptotiek van Laplace integralen	29
5. Fourier transformaties	37
6. Cybernetica	42
7. Cybernetica, vervolg	51
8. Ruis	59
9. Probleem van Wiener	65
Tabel van Laplace transforms	73
Index	74

Inleiding

In deze syllabus is de stof verwerkt van een college met de omvang van een jaaruur waarin een aantal toepassingen zijn behandeld van Laplace en Fourier transformatie op randwaardeproblemen en op problemen van cybernetische aard.

Hierbij wordt reeds enige bekendheid verondersteld met de genoemde transformaties en met de grondslagen van de complexe functietheorie, in het bijzonder wat betreft de residustelling en het gedrag van analytische functies in de omgeving van singulariteiten. Tenslotte wordt aangenomen dat men reeds enigszins vertrouwd is met de klassieke behandeling van randwaardeproblemen bij de trillende snaar en bij warmtegeleiding.

Er worden een aantal problemen behandeld welke ook voorkomen in het college randwaardeproblemen (MC syllabus 3.2). Bij vergelijking van de daar gegeven oplossing met de behandeling in dit college wordt het nut van bijv. de Laplace transformatie gedemonstreerd.

Bij de cybernetische toepassingen wordt een enigszins schematische behandeling gegeven van systemen met terugkoppeling als servomechanismen en automatisch geregelde processen. Tenslotte wordt hierbij de invloed van ruis behandeld volgens de door Wiener aangegeven methode.

Aan het eind van de syllabus is een beknopte lijst van op dit college betrekking hebbende werken opgenomen.

1. Laplace transformatie

We gaan uit van een reële of complexe functie $f(t)$ van een positief reële variabele t . Onder de Laplace getransformeerde (Laplace transform, LT) van $f(t)$ verstaan we de functie $\bar{f}(s)$ van de complexe variabele s gedefinieerd door

$$(1.1) \quad \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Het verband tussen $f(t)$, het origineel, en de LT, het beeld, schrijven we symbolisch als

$$f(t) \doteq \bar{f}(s).$$

Soms noteren we de LT van $f(t)$ als $\mathcal{L}f(t)$. De operator $\mathcal{L}$ van de Laplace transformatie is blijkbaar lineair, d.w.z.

$$(1.2) \quad \mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}f_1 + c_2 \mathcal{L}f_2$$

voor willekeurige constanten c_1 en c_2 .

Voorbeelden 1.1

$$1 \quad \doteq \frac{1}{s}$$

$$t^\mu \quad \doteq \frac{\Gamma(1+\mu)}{s^{1+\mu}}, \quad \mu > -1$$

$$e^{at} \quad \doteq \frac{1}{s-a}$$

$$\cos at \quad \doteq \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\sin at \quad \doteq \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\ln t \quad \doteq \frac{-\gamma - \ln s}{s} \quad (\gamma \text{ constante van Euler})$$

In de regel beperken we ons tot functies $f(t)$ welke in elk interval (a, b) met $0 < a < b < \infty$ van begrensde variatie zijn, die zich voor $t \rightarrow 0$

gedragen als t^μ met $\mu > -1$ en zich voor $t \rightarrow \infty$ gedragen als $\exp at$.

De eis van begrensde variatie betekent dat voor elke positieve t zowel rechter- als linkerlimiet bestaan. We spreken af dat $f(t)$ zo genormeerd is dat steeds

$$2f(t) = f(t+0) + f(t-0).$$

De exponentiële begrenzing

$$(1.3) \quad f(t) = O(\exp at), \quad t \rightarrow \infty$$

maakt dat $\bar{f}(s)$ minstens in het halfvlak $\operatorname{Re} s > a$ als convergente integraal bestaat.

De t -macht begrenzing

$$(1.4) \quad f(t) = O(t^\mu), \quad t \rightarrow 0$$

weerspiegelt zich in een soortgelijk gedrag van $\bar{f}(s)$ voor $s \rightarrow \infty$. Er geldt namelijk

$$(1.5) \quad \bar{f}(s) = O(s^{-1-\mu})$$

zoals zonder moeite uit (1.1) volgt.

Overigens geldt onder ruimere voorwaarden voor $f(t)$ steeds $\bar{f}(s) \rightarrow 0$ voor $s \rightarrow \infty$ hetgeen aldus een nodige voorwaarde is opdat een functie een LT is.

Voor de door (1.1) gedefinieerde LT geldt de volgende fundamentele eigenschap.

Stelling 1.1

Er bestaat een getal α , de convergentieabscis, zodanig dat (1.1) convergeert voor $\operatorname{Re} s > \alpha$ en divergeert voor $\operatorname{Re} s < \alpha$. In het rechter-halfvlak $\operatorname{Re} s > \alpha$ is $\bar{f}(s)$ een holomorfe analytische functie.

Bewijs

Zie bijv. Doetsch, 3. Kap. §2 en 4. Kap. §1.2.

Voorbeelden 1.2

1. $s^{-1} = \mathcal{L}1$ is holomorf voor $\operatorname{Re} s > 0$. De analytische functie $\bar{f}(s)$ kan in dit geval in het gehele s -vlak voortgezet worden tot een meromorfe functie met een pool in $s = 0$.
2. $(\pi/s)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{L}t^{-\frac{1}{2}}$ is holomorf voor $\operatorname{Re} s > 0$. Voortzetting van $\bar{f}(s)$ geeft een analytische functie met een algebraïsche singulariteit in $s = 0$ en de negatief reële s -as als vertakkingssnede.
3. $(s - a)^{-1} = \mathcal{L} \exp at$ is holomorf voor $\operatorname{Re} s > a$. Op de grens van het convergentiehalflak bevindt zich een pool in $s = a$.
4. $s(s^2 + a^2)^{-1} = \mathcal{L} \cos at$ is holomorf voor $\operatorname{Re} s > 0$. Er zijn polen in $s = ia$ en $s = -ia$.

In de praktijk bedient men zich van een aantal rekenregels.

a. Gelijkvormigheidsregel

$$(1.6) \quad f(at) \doteq \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{voor } a > 0.$$

b. Verschuivingsregels

$$(1.7) \quad f(t-a)\theta(t-a) \doteq e^{-as} \bar{f}(s) \quad \text{voor } a > 0.$$

$$(1.8) \quad e^{at} f(t) \doteq \bar{f}(s-a).$$

Het bewijs van deze regels levert geen moeilijkheden. Bij de eerste verschuivingsregel is aan $f(t-a)$ de factor $\theta(t-a)$ toegevoegd om aan te geven dat het linkerlid voor $t < a$ als identiek nul geïnterpreteerd dient te worden. We memoreren de definitie van de genormeerde eenheidssprongfunctie

$$(1.9) \quad \theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } t = 0 \\ 1 & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

c. Differentiatieregels

$$(1.10) \quad f'(t) \doteq s \bar{f}(s) - f(0).$$

$$(1.11) \quad -t f(t) \doteq \bar{f}'(s).$$

De eerste regel, gemakkelijk te bewijzen door op (1.1) partiële integratie toe te passen, geldt uiteraard alleen als $f(t)$ differentieerbaar is voor $t > 0$ en wanneer $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ bestaat. De tweede regel volgt door beide leden van (1.1) naar s te differentieren hetgeen in verband met de hoofdstelling 1.1 voor $\operatorname{Re} s > \alpha$ altijd geoorloofd is.

d. Integratieregels

$$(1.12) \quad \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq f(s)/s.$$

$$(1.13) \quad f(t)/t \doteq \int_s^\infty f(\sigma) d\sigma.$$

De eerste regel geeft geen problemen. Bij de tweede regel is uiteraard vereist dat $f(t)/t$ bij $t = 0$ integreerbaar is. Dit is het geval als bijv. $f(t) = O(t^\mu)$ met $\mu > 0$.

e. Convolutieregel

De convolutie van twee voor $t > 0$ gedefinieerde functies $f(t)$ en $g(t)$ wordt gegeven door

$$(1.14) \quad f(t) * g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Voor de aldus gedefinieerde convolutie geldt de regel

$$(1.15) \quad f(t) * g(t) \doteq \bar{f}(s) \bar{g}(s).$$

Bewijs

$$\begin{aligned}
\bar{f}(s) \bar{g}(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-su} f(t)g(u) dt du \\
&= \int_0^\infty f(t) dt \int_0^\infty e^{-s(t+u)} g(u) du = \int_0^\infty f(t) dt \int_t^\infty e^{-su} g(u-t) du = \\
&= \int_0^\infty e^{-su} du \int_0^u f(t)g(u-t) dt = \mathcal{L} f(t) * g(t).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.3

Het origineel van $s^{-\frac{1}{2}}(s-a)^{-1}$ kunnen we m.b.v. de laatste regel meteen neerschrijven als

$$(\pi t)^{-\frac{1}{2}} * e^{at},$$

dus als

$$\pi^{-\frac{1}{2}} e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Na enige herleiding kunnen we dit schrijven als $a^{-\frac{1}{2}} e^{at} \operatorname{erf}(at)^{\frac{1}{2}}$.

Stelling 1.2

Als $\bar{f}(s)$ de LT is van een functie $f(t)$ die in elk interval (a,b) met $0 < a < b < \infty$ van begrensde variatie is dan geldt de omkeerformule

$$(1.16) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds,$$

waarbij geïntegreerd wordt over een in het convergentiehalfvlak gelegen verticale weg.

Bewijs

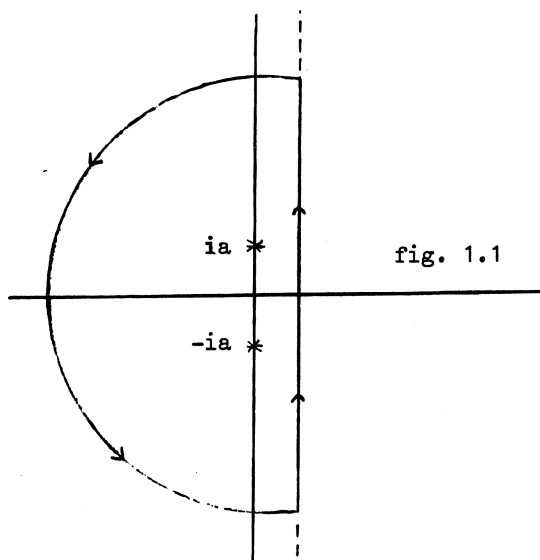
Zie bijv. Doetsch, 6. Kap. §2.

Voorbeeld 1.4

We laten zien hoe het Laplace paar $\cos at \doteq s(s^2 + a^2)^{-1}$ ook uit (1.16) verkregen kan worden. We moeten daarbij berekenen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} s(s^2 + a^2)^{-1} ds,$$

waarbij L een verticale weg $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ is met $\gamma > 0$. We merken op dat de integrand een meromorfe analytische functie is met enkelvoudige polen in $s = \pm ia$. Verder vertoont de integrand voor $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$ een exponentieel dempend karakter. We beschouwen nu de gesloten contour C bestaande uit de halve cirkel $s = \gamma - R \exp i\phi$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi$ en de middellijn $s = \gamma + iu$, $-R \leq u \leq R$ (zie fig. 1.1).



Voor $R \rightarrow \infty$ nadert de integraal over C tot die over L zoals in de hieronder geformuleerde stelling tot uitdrukking komt. De integraal over de gesloten weg C is volgens de residustelling gelijk aan de som van de residuen van $s(s^2 + a^2)^{-1} \exp st$ bij $s = ia$ en $s = -ia$. Voor het residu bij $s = ia$ vinden we $\frac{1}{2} \exp iat$. Voor dat bij $s = -ia$ geldt de geconjugeerde complexe uitdrukking zodat $f(t) = \operatorname{Re} \exp iat = \cos at$.

Stelling 1.3

Is de Laplace transform $\bar{f}(s)$ meromorf voor alle s en holomorf voor $\operatorname{Re} s > \gamma$ en geldt voor $s \rightarrow \infty$ de begrenzing

$$(1.17) \quad \bar{f}(s) = O(s^{-\mu}) \quad \text{met} \quad \mu > 0$$

dan geldt

$$(1.18) \quad f(t) = \sum \operatorname{Res} (e^{st} \bar{f}(s)).$$

Bewijs

Het bewijs van deze stelling kan met eenvoudige middelen uit de functietheorie geleverd worden (lemma van Jordan).

Voorbeeld 1.5

Het origineel van $s^{-1}(s^2 + 1)^{-2}$ kan berekend worden uit de residuen van $s^{-1}(s^2 + 1)^{-2} \exp st$ bij de polen $s = 0$, $s = i$ en $s = -i$. Aldus is

$$f(t) = 1 + \operatorname{Re} \left(-1 + \frac{1}{2} it \right) e^{it} = 1 - \cos t - \frac{1}{2} t \sin t.$$

In sommige gevallen hebben we een verscherping van stelling 1.3 nodig. Het kan namelijk voorkomen dat $\bar{f}(s)$ een zich tot in het oneindige uitstrekkende reeks polen bezit. De begrenzing (1.17) kan dan in de verscherpte versie vervangen worden door bijv. de eis

$$\max_{|s|=R} s^{\mu} \bar{f}(s) \rightarrow 0, \quad \mu > 0,$$

voor een rij $R_1 < R_2 < R_3 < \dots \rightarrow \infty$.

Voorbeeld 1.6

Het origineel van $s^{-1}(e^s - 1)^{-1}$ kan aldus berekend worden uit de residuen bij de polen $s = 0$ (tweevoudig) en $s = \pm 2n\pi i$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). We vinden

$$f(t) = t - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi}.$$

Van praktisch standpunt bezien is dit resultaat niet erg bruikbaar wegens de slechte convergentie van de reeks. Een andere berekening is

$$\frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(t - n) = [t].$$

En passant vinden we daarmee de Fourier reeks van de zaagtandfunctie

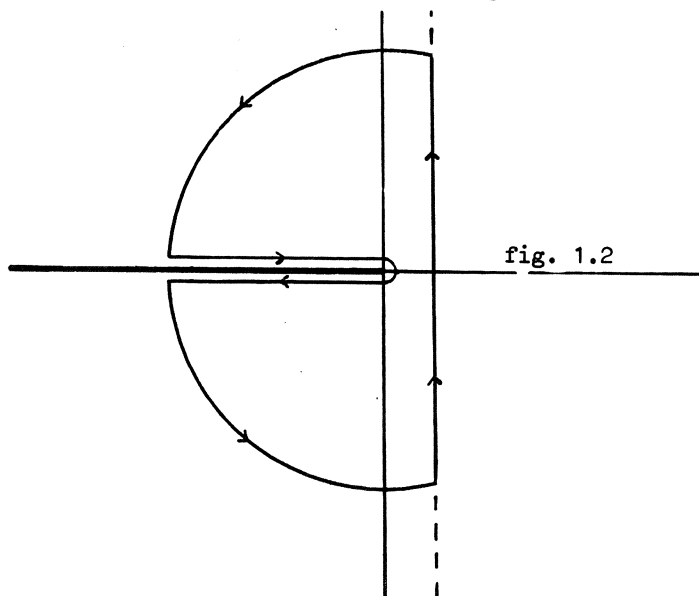
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi} = [t] - t + \frac{1}{2}.$$

Indien een Laplace transform behalve polen ook hogere singulariteiten bezit kan de residustelling niet meer toegepast worden. Soms lukt het toch om met behulp van de complexe omkeerformule tot een eenvoudig resultaat te komen door bijv. de integratieweg op passende wijze te deformeren.

Voorbeeld 1.7

$$(1.19) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{a^2}{4t} \doteq \frac{1}{\sqrt{s}} \exp - a\sqrt{s} \quad (a \geq 0).$$

Bij dit voorbeeld bezit $\bar{f}(s)$ in de oorsprong een vertakkingspunt. De negatief reële s -as kan dienen als vertakkingssnede. Bij toepassing van de complexe omkeerformule kan de verticale weg vervormd worden tot een "platgeslagen lus" om de snede (zie fig. 1.2).



Na limietovergang ($R \rightarrow \infty$) vindt men

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{st-a\sqrt{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}} \quad (\arg s = \pi) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^{st-a\sqrt{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}} \\
 &\hspace{15em} (\arg s = -\pi) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t - ai\sqrt{\sigma}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t + ai\sqrt{\sigma}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t - ai u} du = \frac{\exp - \frac{a^2}{4t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \left(u\sqrt{t} + \frac{ai}{2\sqrt{t}} \right)^2 du = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{a^2}{4t} .
 \end{aligned}$$

2. De trillende snaar

De beweging van een snaar trillend onder invloed van een uitwendige kracht wordt beschreven door het randwaardeprobleem

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x,t), \quad 0 < x < a,$$

$$(2.2) \quad u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a$$

en

$$(2.3) \quad u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Door toepassing van Laplace transformatie volgens

$$(2.4) \quad \bar{u}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt$$

wordt het bovenstaande probleem aanmerkelijk vereenvoudigd. We verkrijgen namelijk een randwaardeprobleem voor een gewone d.v.

$$(2.5) \quad \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - s^2 \bar{u} = -\bar{F}(x,s) - s f(x) - g(x)$$

waarbij

$$\bar{u} = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a.$$

De oplossing van dit probleem kan o.a. met behulp van de bijbehorende functie van Green en de techniek van de variatie van de constanten zonder moeite gevonden worden.

Op de gebruikelijke wijze schrijven we de oplossing als

$$(2.6) \quad \bar{u}(x,s) = \int_0^a \bar{G}(x,\xi,s) \bar{h}(\xi,s) d\xi,$$

waarbij

$$(2.7) \quad \bar{h}(x,s) = \bar{F}(x,s) + s f(x) + g(x),$$

en de Green'se functie $\bar{G}$ bepaald is door

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dx^2} - s^2 \bar{G} = -\delta(x-\xi)$$

met

$$\bar{G}(0, \xi, s) = \bar{G}(a, \xi, s) = 0.$$

We stellen nu

$$\bar{G}(x, \xi, s) = A(x) \sinh sx + B(x) \sinh s(a-x)$$

waarin $A(x)$ en $B(x)$ nader te bepalen functies van x , en natuurlijk ook van ξ en s , zijn.

Hieruit volgt

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{G}(x, \xi, s) = \frac{\sinh sx \sinh s(a-\xi)}{s \sinh sa} \quad \text{voor } x < \xi \\ \bar{G}(x, \xi, s) = \frac{\sinh s(a-x) \sinh s\xi}{s \sinh sa} \quad \text{voor } x > \xi. \end{array} \right.$$

Het analytische gedrag van $\bar{u}(x, s)$, van belang voor de toepassing van de complexe omkeerformule, is bepaald door dat van $\bar{G}$ en van $\bar{F}$. De Green'se functie is blijkbaar meromorf met een rij enkelvoudige polen $s = \pm i n \pi / a$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Een nadere beschouwing laat zien dat $s = 0$ geen pool is. Verdere singulariteiten kunnen slechts van de uitwendige kracht afkomstig zijn. Deze kan zorgen voor extra polen al of niet samenvallend met de door $\bar{G}$ bepaalde polen of voor hogere singulariteiten. De consequentie van een en ander illustreren we aan de hand van enkele voorbeelden. We kiezen daarbij ter vereenvoudiging steeds $a = \pi$.

Voorbeeld 2.1

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} & 0 < x < \pi, \\ u &= 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi, \\ u &= f(x), \quad u_t = 0 & \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

Volgens (2.6) is

$$\bar{u} = s \int_0^\pi \bar{G}(x, \xi, s) f(\xi) d\xi.$$

Er zijn alleen de polen $s = \pm ni$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Toepassing van stelling 1.3 vereist de berekening van het residu van $\bar{u} \exp st$ bij $s = ni$. Zonder veel inspanning vindt men

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cos nt \int_0^\pi f(\xi) \sin n\xi d\xi.$$

Voorbeeld 2.2

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} + ae^{-\lambda t} & 0 < x < \pi, \\ u &= 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi, \\ u = u_t &= 0 & \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

In dit geval kan het gebruik van de Green'se functie beter vermeden worden. De getransformeerde vergelijking

$$\bar{u}_{xx} - s^2 \bar{u} = a/(s + \lambda)$$

heeft blijkbaar de oplossing

$$\bar{u} = \frac{-a}{s^2(s + \lambda)} + A \cosh sx + B \sinh sx,$$

waarbij A en B constanten zijn. Aanpassing aan de voorwaarden bij $x = 0$ en $x = \pi$ geeft

$$\bar{u} = \frac{a}{s^2(s + \lambda)} \left\{ (\cosh sx - 1) - (\cosh s\pi - 1) \frac{\sinh sx}{\sinh s\pi} \right\}.$$

Naast de rij polen $s = \pm ni$, $n = 1, 2, 3, \dots$, is er nog een pool bij $s = -\lambda$. Volgens stelling 1.3 vinden we

$$u(x,t) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \sin nx \operatorname{Re} \left(\frac{i e^{nti}}{\lambda + ni} \right) +$$

$$+ \frac{ae^{-\lambda t}}{\lambda^2} \left\{ (\cosh \lambda x - 1) - (\cosh \lambda \pi - 1) \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda \pi} \right\}$$

of

$$u(x,t) = - \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2(n^2 + \lambda^2)} \sin nx (\lambda \sin nt - n \cos nt) +$$

$$+ \frac{a}{\lambda^2} \left\{ (\cosh \lambda x - 1) - (\cosh \lambda \pi - 1) \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda \pi} \right\} e^{-\lambda t}.$$

Voorbeeld 2.3

$$u_{xx} = u_{tt} + a \sin t \quad 0 < x < \pi,$$

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi,$$

$$u = u_t = 0 \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Als boven heeft de getransformeerde vergelijking de oplossing

$$\bar{u} = \frac{a}{s^2(s^2 + 1)} \left\{ (\cosh sx - 1) - (\cosh s\pi - 1) \frac{\sinh sx}{\sinh s\pi} \right\}.$$

In dit geval vallen de van de uitwendige kracht afkomstige polen $s = \pm i$ samen met polen van de rij $s = \pm ni$. We constateren het optreden van tweevoudige polen hetgeen op resonantie wijst. Het effect van tweevoudige polen van een LT op het origineel is reeds in voorbeeld 1.5 gebleken. Er blijken termen op te treden als $t \sin t$ en $t \cos t$ d.w.z. oscillaties met in de tijd toenemende amplitude. Bij de berekening van $u(x,t)$ beperken we ons tot de hoofdbijdrage, die van de residuen bij $s = \pm i$. Stellen we in de omgeving van $s = i, s = i + w$ dan is $\bar{u}$ lokaal van de vorm

$$\bar{u} \approx \frac{P + Qw}{w^2}.$$

De factor $\exp st$ geeft

$$\exp st \approx (1 + wt)e^{it}$$

zodat het residu in $s = i$ gelijk is aan

$$(Q + Pt)e^{it}.$$

De hoofdbijdrage, het niet-periodieke deel, van $u(x,t)$ is dus

$$2 \operatorname{Re} Pt \exp it,$$

waarin ook de bijdrage van $s = -i$ verwerkt is.

Zonder moeite blijkt

$$P = \frac{a}{\pi} \sin x$$

zodat

$$u(x,t) = \frac{2a}{\pi} t \sin x \cos t + \text{begrensde functie}.$$

3. Warmtegeleiding

De voortplanting van warmte in een homogeen en isotroop medium wordt beschreven door de vergelijking

$$(3.1) \quad \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

waarbij u de temperatuur is en κ een coëfficiënt van warmtegeleiding. De hoeveelheid warmte die per tijdseenheid door een oppervlakteelement $d\sigma$ met normaal $\vec{n}$ heen stroomt wordt beschreven door

$$(3.2) \quad -K \vec{n} \cdot \text{grad } u \, d\sigma = -K \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Het verband tussen κ en K is

$$\kappa = \frac{K}{\rho c},$$

waarbij ρ de dichtheid en c de soortelijke warmte is.

We beschouwen voorlopig uitsluitend warmtetransport in de x -richting, zodat (3.1) overgaat in

$$(3.3) \quad \kappa u_{xx} = u_t.$$

Het fysische beeld waaraan we hierbij kunnen denken is dat van een metalen staaf.

Voorbeeld 3.1

$$\begin{aligned} &\kappa u_{xx} = u_t && -\infty < x < \infty, \\ &\left\{ \begin{array}{ll} u = T_1 & \text{voor } t = 0, \quad x < 0, \\ u = T_2 & \text{voor } t = 0, \quad x > 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we $\kappa = 1$, $T_1 = 1$ en $T_2 = -1$ nemen.

In feite komt dit neer op een aangepaste tijdschaal en temperatuurschaal waarbij $\frac{1}{2} (T_1 + T_2)$ als nultemperatuur gekozen wordt.

Laplace transformatie geeft

$$\bar{u}_{xx} = s\bar{u} - \operatorname{sgn} x.$$

Deze eenvoudiger differentiaalvergelijking heeft de oplossing

$$\bar{u} = A \exp -x\sqrt{s} + B \exp x\sqrt{s} + s^{-1} \quad \text{voor } x > 0.$$

De oplossing voor $x < 0$ heeft een analoge vorm die we niet behoeven op te schrijven omdat u en $\bar{u}$ oneven functies van x zijn. Aangezien u en $\bar{u}$ voor $x \rightarrow \pm \infty$ begrensd zijn is $B = 0$. Het oneven karakter van $\bar{u}(x,s)$, d.w.z. $\bar{u}(-x,s) = -\bar{u}(x,s)$ impliceert $\bar{u}(0,s) = 0$ zodat $A = -s^{-1}$. De oplossing van het getransformeerde probleem is derhalve

$$\bar{u} = \frac{1}{s} (1 - \exp -x\sqrt{s}), \quad x > 0.$$

Bij de inverse transformatie kunnen we gebruik maken van (1.19). Er geldt namelijk

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp -x\sqrt{s} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp -\frac{x^2}{4t}.$$

Dus is

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^x \exp -\frac{\xi^2}{4t} d\xi$$

of

$$u(x,t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}},$$

hetgeen nu geldig is voor alle x . Keren we terug tot de oorspronkelijke eenheden dan is

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) + \frac{1}{2} (T_1 - T_2) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}.$$

Voorbeeld 3.2

$$u_{xx} = u_t \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u = f(x) \quad \text{voor } t = 0.$$

Het getransformeerde probleem is

$$\bar{u}_{xx} - s\bar{u} = -f(x)$$

met $\bar{u}$ begrensd voor $x \rightarrow \pm \infty$.

Volgens de techniek van de variatie van de constanten stellen we

$$\bar{u} = A(x)e^{-x\sqrt{s}} + B(x)e^{x\sqrt{s}}.$$

Dit leidt dan tot

$$2\sqrt{s} A(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) \exp \xi\sqrt{s} d\xi$$

$$2\sqrt{s} B(x) = \int_x^{\infty} f(\xi) \exp -\xi\sqrt{s} d\xi,$$

zodat

$$\bar{u}(x,s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp -|x-\xi|\sqrt{s} d\xi,$$

of in de notatie van de Green'se functie

$$\bar{u}(x,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(x,\xi,s) f(\xi) d\xi,$$

waarbij

$$\bar{G}(x,\xi,s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \exp -|x-\xi|\sqrt{s}.$$

Volgens (1.19) is dit de getransformeerde van

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp -\frac{(x-\xi)^2}{4t}.$$

De oplossing van het gestelde warmtegeleidingsprobleem is dus

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp -\frac{(x-\xi)^2}{4t} d\xi$$

of iets anders geschreven

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2\mu\sqrt{t}) e^{-\mu^2} d\mu.$$

We gaan nu over tot de behandeling van een warmtegeleidingsprobleem in een eindige staaf. Het opmerkelijke hierbij is dat het getransformeerde probleem praktisch identiek is met dat van de in §2 behandelde trillende snaar. Het probleem is

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a,$$

$$(3.5) \quad u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a,$$

en

$$(3.6) \quad u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Het getransformeerde probleem is

$$(3.7) \quad \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - s\bar{u} = -f(x),$$

waarbij

$$\bar{u} = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a.$$

Inderdaad is dit van dezelfde vorm als (2.5) met als enig, maar ook essentieel, verschil dat s nu vervangen is door $\sqrt{s}$.

De oplossing kan nu zonder meer neergeschreven worden als

$$(3.8) \quad \bar{u}(x,s) = \int_0^a \bar{G}(x,\xi,s) f(\xi) d\xi,$$

waarbij volgens (2.8)

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{G}(x,\xi,s) = \frac{\sinh s^{\frac{1}{2}}x \sinh s^{\frac{1}{2}}(a-\xi)}{s^{\frac{1}{2}} \sinh s^{\frac{1}{2}}a} & \text{voor } x < \xi \\ \bar{G}(x,\xi,s) = \frac{\sinh s^{\frac{1}{2}}(a-x) \sinh s^{\frac{1}{2}}\xi}{s^{\frac{1}{2}} \sinh s^{\frac{1}{2}}a} & \text{voor } x > \xi. \end{array} \right.$$

Als vroeger is $\bar{G}(x, \xi, s)$ een meromorfe functie met door $\sinh s^{\frac{1}{2}} a = 0$ gegeven polen. Deze zijn

$$s = -n^2 \pi^2 / a^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De polen zijn hier alle negatief reëel in tegenstelling tot de situatie bij de trillende snaar waar de polen alle zuiver imaginair zijn. Residuberekening leidt als in voorbeeld 2.1 tot

$$(3.10) \quad u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \int_0^a f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi.$$

Met maar weinig meer moeite kunnen problemen opgelost worden waarbij de randvoorwaarden van de tijd afhangen. Zonder hulp van de Laplace transformatie is men hierbij aangewezen op het principe van Duhamel. Het grote technische gemak waarmee deze problemen met de Laplace transformatie aangepakt kunnen worden demonstreren we in de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 3.3

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t & \text{voor} & \quad 0 < x < \infty, \\ u &= f(x) & \text{voor} & \quad t = 0, \\ u &= \phi(t) & \text{voor} & \quad x = 0. \end{aligned}$$

Het getransformeerde probleem is

$$\bar{u}_{xx} = s\bar{u} - f$$

met

$$\bar{u} = \bar{\phi} \quad \text{voor} \quad x = 0.$$

M.b.v. de methode van de variatie van de constanten vinden we

$$2\sqrt{s} \bar{u}(x, s) = e^{-x\sqrt{s}} \int_0^x e^{\xi\sqrt{s}} f(\xi) d\xi + e^{x\sqrt{s}} \int_x^{\infty} e^{-\xi\sqrt{s}} f(\xi) d\xi + C e^{-x\sqrt{s}}$$

waarbij nog C bepaald dient te worden door aanpassing aan de randvoorwaarde bij $x = 0$. Dit geeft

$$C = 2\sqrt{s} \bar{\phi}(s) - \int_0^\infty e^{-\xi\sqrt{s}} f(\xi) d\xi.$$

Terugtransformatie geeft weinig moeilijkheden. Het nieuwe van dit probleem is het optreden van de term met $\bar{\phi}(s)$

$$\bar{u}(x,s) = \bar{\phi}(s) e^{-x\sqrt{s}} + \dots$$

Het inverteren van deze term lukt door toepassing van de convolutieregel. De inverse van $\exp -xs^{\frac{1}{2}}$ volgt uit die van $s^{-\frac{1}{2}} \exp -xs^{\frac{1}{2}}$ door op de laatste differentiatie naar x toe te passen, nl.

$$s^{-\frac{1}{2}} \exp -xs^{\frac{1}{2}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp -\frac{x^2}{4t}$$

en dus

$$\exp -xs^{\frac{1}{2}} \doteq \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-3/2} x \exp -\frac{x^2}{4t}.$$

Er geldt dan

$$\bar{\phi}(s) \exp -x\sqrt{s} \doteq \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \phi(t-\tau) \tau^{-3/2} \exp -\frac{x^2}{4\tau} d\tau.$$

Voorbeeld 3.4

$$u_{xx} = u_t \quad \text{voor} \quad -\pi < x < \pi,$$

$$u = t \quad \text{voor} \quad x = -\pi \text{ en } x = \pi,$$

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Het getransformeerde probleem is

$$\bar{u}_{xx} = s\bar{u}$$

met

$$\bar{u} = s^{-2} \quad \text{voor} \quad x = \pm\pi.$$

De oplossing is

$$\bar{u}(x,s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh \pi\sqrt{s}}.$$

Er is een tweevoudige pool bij $s = 0$ en verder zijn er gewone polen bij $s = - (n + \frac{1}{2})^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Uit de ontwikkeling bij $s = 0$

$$e^{st} \bar{u}(x,s) = \frac{(1 + st + \dots)(1 + \frac{1}{2} sx^2 + \dots)}{s^2(1 + \frac{1}{2} s\pi^2 + \dots)}$$

volgt het residu $t - \frac{1}{2} (\pi^2 - x^2)$.

Het residu bij $s = - (n + \frac{1}{2})^2$ is $\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t} \cos(n + \frac{1}{2})x}{(n + \frac{1}{2})^3}$.

De oplossing is dan

$$u(x,t) = t - \frac{1}{2} (\pi^2 - x^2) + \frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n + \frac{1}{2})x}{(2n + 1)^3} \exp - (n + \frac{1}{2})^2 t.$$

Bij het volgende voorbeeld kan men zien welke complicaties optreden bij minder eenvoudige randvoorwaarden als bijv. een stralingsvoorwaarde van Newton.

Voorbeeld 3.5

$$u_{xx} = u_t \quad \text{voor} \quad 0 < x < a,$$

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0,$$

$$u_x + hu = 0 \quad \text{voor} \quad x = a,$$

$$u = 1 \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Het getransformeerde probleem is

$$\bar{u}_{xx} = s\bar{u} - 1$$

met overeenkomstige voorwaarden bij $x = 0$ en $x = a$.

We kunnen meteen stellen

$$\bar{u}(x,s) = A \sinh x\sqrt{s} - (\cosh x\sqrt{s} - 1)/s$$

waarbij alleen nog aan de voorwaarde bij $x = a$ voldaan moet worden. Zonder moeite blijkt

$$A = \frac{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s} + h(\cosh a\sqrt{s} - 1)}{s(\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s} + h \sinh a\sqrt{s})}.$$

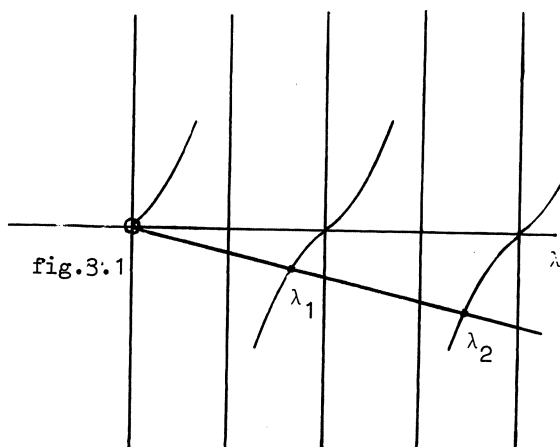
Weer is $\bar{u}(x,s)$ een meromorfe functie met door

$$\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s} + h \sinh a\sqrt{s} = 0$$

bepaalde polen. We merken even op dat $s = 0$ een regulier punt is. Op grond van wat ons bekend is van eenvoudiger warmtegeleidingsproblemen kunnen we verwachten dat de uit bovenstaande transcendente vergelijking resulterende polen negatief reëel zijn, zeg van de vorm $s = -\lambda^2/a^2$. Inderdaad levert de overeenkomstige vergelijking

$$\lambda \cos \lambda + ha \sin \lambda = 0$$

een rij reële λ -waarden zoals te zien is uit fig. 3.1 waar zowel $\tan \lambda$ als de lijn $-(ha)^{-1}\lambda$ grafisch uitgezet zijn.



Bewezen kan worden (bijv. door beschouwing van een verwant Sturm-Liouville probleem) dat er inderdaad alleen negatief reële polen $s = -\lambda^2/a^2$ zijn.

Zijn we alleen geïnteresseerd in een fysisch belangrijk gegeven als de warmtestroom aan het uiteinde $x = 0$, d.w.z. volgens (3.2) de functie $u_x(0, t)$ dan is het niet noodzakelijk eerst de volledige oplossing $u(x, t)$ te bepalen. Uit het bovenstaande volgt namelijk

$$\bar{u}_x(0, s) = A\sqrt{s}.$$

Terugtransformatie leidt tenslotte tot

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sin \lambda_n + ah(1 - \cos \lambda_n)}{(1 + ah)\cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n} \exp - \lambda_n^2 t/a^2.$$

Voorbeeld 3.6

Het volgende probleem heeft betrekking op een uit twee verschillende materialen bestaande staaf

$$\kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad 0 < x < a,$$

$$\kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad a < x < \infty,$$

met beginvoorwaarde

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0 \quad \text{voor} \quad t = 0$$

en randvoorwaarde

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0.$$

Aan het grensvlak $x = a$ gelden overgangsvoorwaarden welke de continuïteit van temperatuur en warmtestroom uitdrukken, nl.

$$u_1 = u_2, \quad K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{voor} \quad x = a.$$

Het getransformeerde probleem is

$$\kappa_1 \bar{u}_{1xx} = s\bar{u}_1 - 1, \quad \kappa_2 \bar{u}_{2xx} = s\bar{u}_2$$

met overeenkomstige voorwaarden bij $x = 0$, $x = a$ en natuurlijk als aanvullende eis dat $\bar{u}_2$ begrensd is voor $x \rightarrow \infty$. We kunnen stellen

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{s} + A \cosh x \sqrt{\frac{s}{\kappa_1}},$$

$$\bar{u}_2 = B \exp - x \sqrt{\frac{s}{\kappa_2}},$$

waarbij reeds voldaan is aan de eisen bij $x = 0$ en $x = \infty$. Aanpassing op het grensvlak $x = a$ geeft

$$A \cosh a \sqrt{s/\kappa_1} - B \exp - a \sqrt{s/\kappa_2} = -\frac{1}{s},$$

$$A K_1 \sqrt{\kappa_2} \sinh a \sqrt{s/\kappa_1} + B K_2 \exp - a \sqrt{s/\kappa_2} = 0.$$

Willen we bijv. alleen de temperatuur op $x = 0$ kennen dan kunnen we m.b.v. de door bovenstaande vergelijking bepaalde A de LT van $u_1(0,t)$ schrijven als

$$\bar{u}_1(0,s) = 1 - \left\{ \frac{K_1 \sqrt{\kappa_2}}{K_2 \sqrt{\kappa_1}} \sinh a \sqrt{\frac{s}{\kappa_1}} + \cosh a \sqrt{\frac{s}{\kappa_2}} \right\}^{-1}.$$

Terugtransformatie levert hier wat meer moeilijkheden omdat $\bar{u}_1(0,s)$ in $s = 0$ een vertakkingspunt heeft. We beschouwen hier alleen het geval dat a klein is. Dan geldt bij benadering

$$\bar{u}_1(0,s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(1 + \alpha \sqrt{s})} + \dots,$$

waarbij

$$\alpha = \frac{\rho_1 c_1}{\sqrt{K_2 \rho_2 c_2}} a.$$

Uit de tabel van Laplace transforms volgt daarmee de benadering

$$u_1(0,t) = \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{\alpha} \exp \frac{t}{\alpha^2} + \dots$$

4. Asymptotiek van Laplace integralen

We hebben reeds in §1 gezien (verg. 1.4 en 1.5) dat het gedrag van een LT voor $s \rightarrow \infty$ correspondeert met dat van het origineel voor $t \rightarrow 0$. In deze paragraaf zal hiervan een gedetailleerde uitwerking worden gegeven. Als belangrijk resultaat vermelden we dat een convergente of alleen asymptotische machtreeksontwikkeling van $f(t)$ in de omgeving van $t = 0$ leidt tot een asymptotische machtreeks van $f(s)$ voor $s \rightarrow \infty$. In sommige gevallen kan deze ontwikkeling van $f(s)$ naar reciproke machten van s convergeren.

Voorbeeld 4.1

Bekend is dat $\mathcal{L}(e^{-t}) = (s + 1)^{-1}$.

Voor $t \rightarrow 0$ geldt de convergente machtreeks

$$f(t) = 1 - t + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3 + \dots$$

Hiermede correspondeert de asymptotische reeks

$$\bar{f}(s) = s^{-1} - s^{-2} + s^{-3} - s^{-4} + \dots,$$

die bovendien convergeert voor $|s| > 1$.

Voorbeeld 4.2

Bekend is dat $\mathcal{L}(\exp - \frac{1}{4} t^2) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} s \cdot \exp s^2$. Voor $t \rightarrow 0$ geldt de convergente machtreeks

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2} t\right)^{2k} / k!.$$

Hiermede correspondeert de asymptotische reeks

$$\sqrt{\pi} e^{s^2} \operatorname{erfc} s \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k!} s^{-2k-1},$$

welke in dit geval altijd divergeert.

In de toepassingen is het vaak andersom. Dat wil zeggen dat $\bar{f}(s)$ expliciet bekend is maar dat $f(t)$ niet op eenvoudige wijze in bekende

functies uitgedrukt kan worden. Nemen we aan dat $f(t)$ voor $t \rightarrow 0$ een convergente of asymptotische machtreeks bezit dan kennen we van deze reeks expliciet de getransformeerde, d.i. de asymptotische ontwikkeling van $\bar{f}(s)$ voor $s \rightarrow \infty$. Inverse transformatie leidt dan zonder moeite tot de verlangde machtreeksontwikkeling.

Voorbeeld 4.3

Uitgaande van de voor $|s| > 1$ convergente asymptotische reeks

$$\frac{1}{\sqrt{s}(1 + \sqrt{s})} \sim \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s\sqrt{s}} + \dots \right)$$

vinden we voor het origineel

$$f(t) = 1 - \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{t}{\Gamma(2)} - \frac{t\sqrt{t}}{\Gamma(\frac{5}{2})} + \dots,$$

een voor alle t convergente machtreeks.

Overigens kan $f(t)$ als een errorfunctie worden uitgedrukt a.v.

$$f(t) = \operatorname{erfc} \sqrt{t} \cdot \exp t.$$

De bovenstaande machtreeksontwikkeling is hieruit niet zo eenvoudig af te leiden!

We zeggen dat de functie $\bar{f}(s)$ voor $s \rightarrow \infty$ (s reëel) een asymptotische machtreeks bezit

$$(4.1) \quad \bar{f}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^{\mu+k}}$$

als voor elke restterm

$$(4.2) \quad R_m(s) = \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^m a_k s^{-\mu-k}$$

geldt dat

$$(4.3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\mu+m} R_m(s) = 0.$$

Op analoge wijze wordt de asymptotische eigenschap van een machtreeks van $f(t)$ voor $t \rightarrow 0$ gedefinieerd. We kunnen gemakkelijk inzien dat een machtreeks die convergeert in een zeker gebied om de oorsprong tegelijk een voor $t \rightarrow 0$ asymptotische reeks is. Geldt immers

$$g(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k + R_m(t)$$

dan is voor elke index m

$$\lim_{t \rightarrow 0} R_m(t)/t^m = \lim_{t \rightarrow 0} (a_{m+1}t + a_{m+2}t^2 + \dots) = 0$$

zodat inderdaad aan de asymptotische eigenschap voldaan is.

Stelling 4.1

Geldt voor $f(t)$ de asymptotische reeksontwikkeling

$$(4.4) \quad t^{-\mu} f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad t \rightarrow 0$$

dan bezit zijn Laplace transform de asymptotische reeksvoorstelling

$$(4.5) \quad \bar{f}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma(k + \mu + 1) s^{-k-\mu-1}.$$

Bewijs

Uit de asymptotische eigenschap van $f(t)$ volgt het bestaan van positieve constanten c en C zodanig dat

$$|f(t) - \sum_{k=0}^m a_k t^{k+\mu}| < C t^{m+\mu+1} \quad \text{voor} \quad |t| < c.$$

We schrijven

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^m a_k \Gamma(k + \mu + 1) s^{-k-\mu-1} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left\{ f(t) - \sum_{k=0}^m a_k t^{k+\mu} \right\} dt = \\ &= \int_0^c e^{-st} \left\{ f(t) - \sum_{k=0}^m a_k t^{k+\mu} \right\} dt + \int_c^{\infty} e^{-st} \left\{ f(t) - \sum_{k=0}^m a_k t^{k+\mu} \right\} dt. \end{aligned}$$

Voor de eerste integraal geldt de majorant

$$C \int_0^c e^{-st} t^{m+\mu+1} dt \leq C \Gamma(m + \mu + 2) s^{-m-\mu-2}.$$

Voor de tweede integraal geldt de majorant

$$\int_c^\infty e^{-st} \phi(t) dt = e^{-cs} \int_0^\infty e^{-st} \phi(t+c) dt = O(e^{-cs}).$$

Aangezien ook $s^{m+\mu+1} e^{-cs} \rightarrow 0$ voor $s \rightarrow \infty$ bij elke keuze van m geldt alles samenvattend

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{m+\mu+1} \left\{ \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^m a_k \Gamma(k + \mu + 1) s^{-k-\mu-1} \right\} = 0$$

in overeenstemming met (4.3).

Voorbeeld 4.4

Bekend is

$$\int_0^2 e^{-st} (2t - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \pi e^{-s} I_0(s),$$

waarbij $I_0(s)$ een gemodificeerde Besselfunctie is. Het linkerlid is in feite de LT van de functie

$$\begin{cases} f(t) = 2^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} t\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < t < 2, \\ f(t) = 0 & \text{voor } t \geq 2. \end{cases}$$

Volgens de stelling leidt de voor $|t| < 2$ geldende machtreeksontwikkeling

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} 2^{-k-\frac{1}{2}} t^{k-\frac{1}{2}}$$

tot de asymptotische reeks

$$(4.6) \quad e^{-s} I_0(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k + \frac{1}{2})}{k! \Gamma^2(\frac{1}{2})} \frac{1}{(2s)^k}$$

of

$$e^{-s} I_0(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \left(1 + \frac{1}{8} s^{-1} + \frac{9}{128} s^{-2} + \dots \right).$$

Voorbeeld 4.5

Bekend is

$$\int_0^\infty e^{-st} (2t + t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = e^s K_0(s),$$

waarbij $K_0(s)$ de aan $I_0(s)$ toegevoegde gemodificeerde Besselfunctie is. Als in het vorige voorbeeld geldt

$$(4.7) \quad e^s K_0(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma^2(k + \frac{1}{2})}{k! \Gamma^2(\frac{1}{2})} \frac{1}{(2s)^k}$$

of

$$e^s K_0(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \left(1 - \frac{1}{8} s^{-1} + \frac{9}{128} s^{-2} + \dots \right).$$

In toepassingen wordt de asymptotische ontwikkeling van $\bar{f}(s)$ voor $s \rightarrow \infty$ vaak gecompliceerd door het optreden van exponentiele functies als

$$\bar{f}(s) = e^{-as} - b\sqrt{s} \bar{g}(s)$$

waarbij $\bar{g}(s)$ een zuivere asymptotische machtreeksontwikkeling bezit. Van de factor $\exp -as$ kunnen we ons gemakkelijk bevrijden door de verschuivingsregel (1.7) toe te passen. Dit betekent dat we, i.v.m. de consequentie $f(t) = 0$ voor $0 < t < a$, nu te maken hebben met het gedrag van $f(t)$ voor $t \rightarrow a$. De factor $\exp -b\sqrt{s}$ geeft meer moeilijkheden. Vaak kan men zich behelpen door de bekende formules voor $s^{-\frac{1}{2}} \exp -bs^{\frac{1}{2}}$, $s^{-1} \exp -bs^{\frac{1}{2}}$ etc. toe te passen.

Een algemenere methode is de volgende. We beschouwen de complexe omkeerformule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} - b\sqrt{s} \bar{g}(s) ds$$

en vervangen s door een nieuwe variabele p zodat

$$st - b\sqrt{s} = pt - \frac{b^2}{4t}.$$

Dit betekent

$$\sqrt{s} = \sqrt{p} + \frac{b}{2t}.$$

We ontwikkelen dus niet $\bar{g}(s)$ naar machten van s^{-1} maar wegens

$$e^{-b\sqrt{s}} \bar{g}(s) = e^{-\frac{b^2}{4t}} \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \bar{g}(s(p)) \frac{ds}{dp} dp$$

ontwikkelen we

$$\bar{g} \left\{ \left(\sqrt{p} + \frac{b}{2t} \right)^2 \right\} \left(1 + \frac{b}{2t\sqrt{p}} \right)$$

naar reciproke machten van p .

Voorbeeld 4.6

Bij de warmtegeleiding in een eindige staaf

$$u_{xx} = u_t \quad \text{voor} \quad -1 < x < 1,$$

$$u = 1 \quad \text{voor} \quad x = -1 \text{ en } x = 1,$$

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad t = 0$$

vraagt men i.h.b. naar de temperatuur op $x = 0$ voor kleine waarden van t .

Zonder moeite vindt men

$$\bar{u}(0, s) = \frac{1}{s \cosh \sqrt{s}}.$$

De gebruikelijke residuontwikkeling faalt voor kleine t wegens de slechte convergentie.

Voor $s \rightarrow \infty$ geldt de ontwikkeling

$$\bar{u}(0, s) = \frac{2}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \exp - (2k+1) \sqrt{s}.$$

Term voor term terugtransformeren geeft de voor kleine t goed bruikbare ontwikkeling

$$u(0,t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{erfc} \frac{2k+1}{2\sqrt{t}}.$$

Voorbeeld 4.7

Bij het in voorbeeld 3.5 beschouwde probleem vraagt men naar de warmtestroom op $x = 0$ voor kleine waarden van t . Men heeft

$$\bar{u}_x(0,s) = \frac{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s} + h(\cosh a\sqrt{s} - 1)}{\sqrt{s}(\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s} + h \sinh a\sqrt{s})}.$$

Voor $s \rightarrow \infty$ geldt

$$\bar{u}_x(0,s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{2h}{h + \sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} + \dots \right).$$

Terugtransformatie geeft voor $t \rightarrow 0$

$$u_x(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - 2h \operatorname{erfc} \left(h\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \exp(h^2 t + ha) + \dots$$

Voorbeeld 4.8

De warmtegeleiding in een oneindig lange cilindrische staaf $r \leq a$, $-\infty < z < \infty$ is bepaald door de pdv

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

in de veronderstelling dat de temperatuur u slechts van r en t afhangt.

De randvoorwaarde is $u = u_0$ voor $r = a$. De beginvoorwaarde is $u = 0$ voor $t = 0$. We stellen het probleem het gedrag van $u(r,t)$ voor kleine waarden van t te bepalen.

Laplace transformatie geeft

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} - s\bar{u} = 0.$$

De oplossingen hiervan zijn Bessel functies $I_0(r\sqrt{s})$ en $K_0(r\sqrt{s})$, waarvan alleen de eerste bruikbaar is. Zonder moeite vindt men

$$\bar{u}(r,s) = u_0 \frac{I_0(r\sqrt{s})}{s I_0(a\sqrt{s})}.$$

Het origineel van het rechterlid kan met behulp van de residustelling via de complexe omkeerformule als een reeks geschreven worden. Het verkregen resultaat is evenwel slechts bruikbaar voor grote waarden van t . Om ook een voor kleine waarden van t bruikbaar resultaat te vinden passen we asymptotische ontwikkeling voor grote waarden van s toe. Uit (4.6) volgt

$$\begin{aligned} \bar{u}(r,s) &\sim u_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{e^{r\sqrt{s}} (1 + \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{8r} + \dots)}{s e^{a\sqrt{s}} (1 + \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{8a} + \dots)} \\ &\sim u_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \frac{\exp - (a-r)\sqrt{s}}{s} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\exp - (a-r)\sqrt{s}}{s\sqrt{s}} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Terugtransformatie levert een voor kleine waarden van t bruikbaar resultaat. Beperken we ons tot de hoofdterm dan is dus

$$u(r,t) \sim u_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \operatorname{erfc} \frac{a-r}{2\sqrt{t}}.$$

Het resultaat is niet bruikbaar voor $r = 0$. Op de as van de cylinder geldt i.h.b.

$$\bar{u}(0,s) = \frac{u_0}{s I_0(a\sqrt{s})} \sim u_0 \sqrt{2\pi a} \frac{\exp - a\sqrt{s}}{s^{3/4}}.$$

We vermelden het hieruit door terugtransformatie verkregen resultaat

$$u(0,t) \sim \frac{u_0 a}{\sqrt{\pi t}} K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{a^2}{8t} \right) \exp - \frac{a^2}{8t}.$$

5. Fourier transformatie

Onder de Fourier getransformeerde (Fourier transform, FT) van een functie $f(x)$ van een reële variabele $x \in (-\infty, \infty)$ verstaan we formeel de functie $\bar{f}(u)$ bepaald door

$$(5.1) \quad \bar{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx.$$

Aangezien uit het verband steeds blijkt of men te maken heeft met een Fourier transform dan wel met een Laplace transform gebruiken we dezelfde notaties. We schrijven dus net als in §1

$$f(x) \doteq \bar{f}(u).$$

Soms bezigen we de notatie $\mathcal{F}$ i.p.v. $\bar{f}$. Het is duidelijk dat de Fourier operator $\mathcal{F}$ lineair is, d.w.z.

$$(5.2) \quad \mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{F}f_1 + c_2 \mathcal{F}f_2.$$

Op verschillende wijzen kan de definierende integraal (5.1) voor reële of complexe u geïnterpreteerd worden. Beperken we ons voorlopig tot reële u dan is (5.1) zinvol voor Riemann integreerbare functies $f(x)$ welke voor $x \rightarrow \pm \infty$ voldoende sterk naar nul gaan.

Voorbeelden 5.1

$$\theta(x) \doteq \frac{1}{u} + \pi \delta(u)$$

$$e^{-a|x|} \doteq \frac{2a}{u^2 + a^2}, \quad a > 0$$

$$\frac{1}{x^2 + a^2} \doteq \frac{\pi}{a} \exp - a|u|, \quad a > 0$$

$$\frac{x}{x^2 + a^2} \doteq -i\pi \exp - a|u|, \quad a > 0$$

$$\frac{\sin ax}{x} \doteq \pi \{ \theta(u+a) - \theta(u-a) \}, \quad a > 0$$

$$e^{-ax^2} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp - \frac{u^2}{4a}, \quad a > 0.$$

Het biedt voordelen om voor de functies $f(x)$ de ruimere klasse van Lebesgue integreerbare functies te nemen met

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Deze klasse duiden we aan met $L_1(-\infty, \infty)$. Voor dergelijke functies geldt de volgende hoofdstelling.

Stelling 5.1 (Jordan)

Als $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ en van begrensde variatie is in de omgeving van x_0 dan geldt de omkeerformule

$$\frac{1}{2} \{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-iux_0} \bar{f}(u) du.$$

Bewijs

Zie bijv. Goldberg, p. 12.

In de praktijk gebruiken we de omkeerformule meestal in de vereenvoudigde vorm

$$(5.3) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \bar{f}(u) du.$$

Het is niet zonder meer waar dat de Fourier transform van een functie uit de genoemde L_1 klasse weer tot die klasse behoort. In de praktijk is dit doorgaans wel het geval zodat het formulepaar (5.1) en (5.3) een symmetrische interpretatie toelaat, d.w.z. dat blijkens (5.3) $2\pi f(-x)$ opgevat kan worden als de Fourier transform van de Fourier getransformeerde.

Bij toepassingen hebben we vaak te maken met de convolutie van de twee functies $f(x)$ en $g(x)$ welke in uitbreiding van de in (1.14) gegeven definitie hier bepaald is door

$$(5.4) \quad f(x) * g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi.$$

Deze definitie is zinvol als zowel f als g tot de klasse $L_1(-\infty, \infty)$ behoren. Er geldt namelijk de volgende stelling.

Stelling 5.2

Als $f(x)$ en $g(x)$ beide tot $L_1(-\infty, \infty)$ behoren bestaat de convolutie en behoort tot dezelfde functieklassse. Bovendien geldt

$$(5.4) \quad f(x) * g(x) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \bar{g}(x-u) du.$$

Bewijs

Zie bijv. Goldberg, p. 19, 20.

De convolutieregel (5.4) is de parallel voor de overeenkomstige regel (1.15) voor Laplace transforms. De regel (5.4) kan men ook lezen als

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \bar{f}(u) \bar{g}(u) du = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi.$$

In het bijzonder volgt hieruit voor $x = 0$ de gelijkheid

$$(5.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(u) \bar{g}(u) du = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(-\xi) d\xi.$$

Aangezien

$$f^*(-x) \doteq \bar{f}^*(u)$$

waarin de asterisk de complex geconjugeerde aanduidt, volgt hieruit door de keuze van $g(x) = f^*(-x)$ als belangrijk speciaal geval

$$(5.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(u)|^2 du = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx,$$

de gelijkheid van Parseval.

De Fourier transformatie van functies $f(x)$ welke identiek verdwijnen voor $x < 0$ is equivalent aan de Laplace transformaties.

Het verband tussen

$$(5.7) \quad \int_0^{\infty} e^{iwx} f(x) dx \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

waarbij zowel $w (= u + iv)$ als s complex verondersteld worden, is immers eenvoudigweg

$$(5.8) \quad w = is.$$

Dit betekent bijvoorbeeld dat het rechterhalfvlak van convergentie van $f(x)$ overgaat in een bovenhalfvlak van convergentie. De theorie van deze eenzijdige F-transformatie is dus vrijwel identiek met die van de L-transformatie. Het verschil bestaat slechts in een draaiing van een kwartslag van het complexe vlak.

Analoog kan de F-transform van een functie $f(x)$ welke voor $x > 0$ identiek verdwijnt opgevat worden als een L-transform met $w = -is$ hetgeen bijv. een benedenhalfvlak van convergentie met zich meebrengt.

Voor de volledige F-transform van een functie $f(x)$ kunnen we schrijven

$$(5.9) \quad \bar{f}(w) = \int_0^{\infty} e^{iwx} f(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-iwx} f(-x) dx.$$

Volgens de bovenstaande redenering convergeert de eerste term in het rechterlid in een bovenhalfvlak $\text{Im } w > \alpha$ en de tweede term in een benedenhalfvlak $\text{Im } w < \beta$. In het algemeen bestaat $\bar{f}(w)$ voor complexe w in de horizontale strook $\alpha < \text{Im } w < \beta$. In sommige gevallen blijkt deze strook evenwel samengeschrumpeld te zijn tot de reële as $w = u$.

Voorbeelden 5.2

$$\frac{1}{1+x^2} \doteq \pi e^{-|u|}, \quad \text{Im } w = 0.$$

$$\frac{1}{\cosh x} \doteq \frac{\pi}{\cosh \frac{1}{2}\pi w}, \quad -1 < \text{Im } w < 1.$$

$$e^{-ax^2} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp -\frac{w^2}{4a}, \quad a > 0, \quad -\infty < \text{Im } w < \infty.$$

Bij toepassingen doet zich vaak de vraag voor onder welke omstandigheden de complexe F-transform $\bar{f}(w)$ de transform is van een functie $f(x)$ welke voor $x < 0$ identiek verdwijnt. Men kan zich hierbij van de volgende stelling bedienen, in zekere zin een variant van stelling 1.3.

Stelling 5.2

Is de complexe Fourier transform $\bar{f}(w)$ convergent voor $\text{Im } w = 0$ en holomorf voor $\text{Im } w > 0$ en geldt voor $|w| \rightarrow \infty$ de begrenzing

$$\bar{f}(w) = O(w^{-\mu}) \quad \text{met } \mu > 0$$

dan geldt

$$f(x) = 0 \quad \text{voor } x < 0.$$

Bewijs

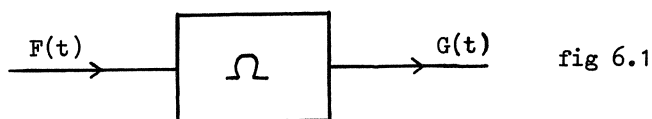
Beschouw de integraal

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-iwx} \bar{f}(w) dw, \quad x < 0,$$

over een contour bestaande uit de reële as van $-R$ tot R en een halve cirkel in het bovenhalfvlak $w = R \exp i\theta$ van $\theta = 0$ tot $\theta = \pi$. Voor $R \rightarrow \infty$ nadert de bijdrage van de reële as tot $f(x)$, die van de halve cirkel tot nul terwijl de gegeven integraal zelf nul is. Dus $f(x) = 0$ voor $x < 0$.

6. Cybernetica

In de cybernetica, letterlijk stuurmanskunst, beschouwt men problemen welke optreden bij het besturen en regelen van mechanismen en processen van velerlei aard. Als onderdeel van een dergelijk systeem beschouwen we een filter (unit, magic box) waarbij een ingangsgrootheid (input) getransformeerd wordt tot een uitgangsgrootheid (output). In meer wiskundige taal is hierbij sprake van een operator Ω die een inputfunctie $F(t)$ overvoert in een outputfunctie $G(t)$, waarbij t de tijd is.



Aan Ω stellen we de eisen van lineariteit, continuïteit en transitiviteit, d.w.z.

$$(6.1) \quad \Omega(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2,$$

$$(6.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(F_n) = \Omega(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n),$$

$$(6.3) \quad \Omega(F(t + \tau)) = G(t + \tau).$$

Uit deze eisen volgt dat lineaire operaties op F als differentieren en integreren worden afgebeeld als overeenkomstige operaties op G . In het bijzonder geldt

$$(6.4) \quad \Omega\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{dG}{dt},$$

en

$$(6.5) \quad \Omega \int_a^t F(\tau) d\tau = \int_a^t G(\tau) d\tau.$$

Een bezwaar bij het toepassen van deze regels kan zijn dat de inputfunctie discontinuïteiten kan bezitten terwijl de outputfunctie overal glad is. Kiezen we als input de eenheidssprongfunctie $\theta(t)$ en noemen we de output $R(t)$ dan dreigt de differentiatieregel (6.4) te falen.

Een remedie is om de functies als distributies of gegeneraliseerde functies op te vatten. Hierbij geldt

$$(6.6) \quad \frac{d}{dt} \theta(t) = \delta(t),$$

waarbij $\delta(t)$ de Dirac functie is, gekarakteriseerd door de eigenschap

$$(6.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \delta(t) dt = \Phi(0)$$

voor elke continue functie $\Phi(t)$.

Men kan het gebruik van distributies vermijden door de discontinue functies te benaderen door continue. In het bijzonder kan $\theta(t)$ vervangen worden door de, overigens beter met fysische condities overeenkomende, "gladde" sprongfunctie

$$(6.8) \quad \theta_n(t) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} nt) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{nt} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Inderdaad geldt voor $n \rightarrow \infty$

$$\theta_n(t) \rightarrow \theta(t).$$

De Dirac functie wordt op deze wijze benaderd door

$$(6.9) \quad \delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp - n^2 t^2,$$

maar deze functie heeft voor $n \rightarrow \infty$ geen limiet meer in de klassieke zin.

We zullen voortaan met weinig commentaar van het formalisme van de gegeneraliseerde functies gebruik maken. De diverse afleidingen kunnen zonder veel moeite streng gemaakt worden.

Van groot belang is de werking van Ω op de convolutie van twee functies. Volgens (5.4) heeft men

$$\Omega F_1(t) * F_2(t) = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau.$$

Uit de eigenschappen van Ω , i.h.b. de transitiviteit, volgt

$$\Omega F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) \Omega F_2(t-\tau) d\tau = F_1 * \Omega F_2$$

en met verwisseling van F_1 en F_2 een analoge betrekking. Er geldt dus

$$(6.10) \quad \Omega F_1 * F_2 = F_1 * G_2 = G_1 * F_2.$$

Elke operator kan vastgelegd worden door zijn responsie op de inputfunctie $\delta(t)$. Noemen we de output $X(t)$ dan kunnen we onmiddellijk de output bepalen van een willekeurige input $F(t)$. Inderdaad geldt

$$\begin{aligned} \Omega F(t) &= \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \Omega F * \delta = \\ &= F * \Omega \delta = F * X \end{aligned}$$

zodat

$$(6.11) \quad \Omega F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau) F(\tau) d\tau.$$

Het is duidelijk dat $X(t) \equiv 0$ voor $t < 0$, hetgeen men wel zo uitdrukt dat verondersteld wordt dat de operator Ω slechts op het verleden werkt. Met behulp van deze regels komen we dan tot het volgende input-output schema.

input	output
$\delta(t)$	$X(t)$
$\theta(t)$	$\int_0^t X(\tau) d\tau$
$F(t)$	$X(t) * F(t)$
$e^{i\omega t}$	$e^{i\omega t} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} X(\tau) d\tau$

Bijcybernetische systemen kan men met voordeel van Fourier- of Laplace transformatie gebruik maken. Is $x(\omega)$ de F-transform van $X(t)$ volgens de definitie

$$(6.12) \quad x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} X(t) dt$$

en op overeenkomstige wijze

$$(6.13) \quad f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(t) dt$$

dan lezen we uit het bovenstaande lijstje onmiddellijk af dat

$$(6.14) \quad \text{input } e^{-i\omega t} \rightarrow \text{output } x(\omega) e^{-i\omega t},$$

zodat $x(\omega)$ opgevat kan worden als de complexe amplitude van een harmonische trilling met frequentie ω . Hier blijkt ook de betekenis van het begrip filter, namelijk een unit waarbij trillingen van een bepaalde frequentie doorgelaten worden en die van een andere frequentie onderdrukt worden. Een maat voor de filterwerking is dus $|x(\omega)|$.

Uit de theorie van de complexe Fourier transformatie volgt dat $x(w)$ voor complexe waarden w van ω een analytische functie van w is welke holomorf is in het bovenhalfvlak $\text{Im } w > 0$.

In de praktijk wordt de vraag gesteld een filter te construeren dat zekere eigenschappen moet bezitten, bijv. het afsnijden van hogere frequenties. Het blijkt dat voor electronische filters welke met de gebruikelijke componenten als weerstanden en condensatoren samengesteld worden de filterfunctie van het type

$$(6.15) \quad x(w) = \frac{P(w)}{Q(w)}$$

is waarbij $P(w)$ en $Q(w)$ veeltermen zijn.

In de regel zal $x(w) \rightarrow 0$ voor $w \rightarrow \infty$ moeten gelden. In dat geval is de graad van $P(w)$ minstens één lager dan die van $Q(w)$. Omdat $x(w)$ voor $\text{Im } w > 0$ vrij van singulariteiten moet zijn kan $Q(w)$ slechts nulpunten in het benedenhalfvlak bezitten.

Voorbeeld 6.1

$$x(\omega) = \frac{1}{i\omega - a} \quad \text{geeft} \quad X(t) = e^{-at} \theta(t), \quad a > 0,$$

De filterwerking is bepaald door $|x(\omega)| = (\omega^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Het voordeel van de Fourier transformatie blijkt vooral bij het gebruik van de convolutieregel (5.4). Aldus correspondeert de input $F(t)$ na F-transformatie met de output $x(\omega)f(\omega)$, d.w.z.

$$(6.16) \quad f(\omega) \rightarrow x(\omega)f(\omega).$$

Aan het gebruik van de Fourier transformatie volgens bovenstaande beschouwingen kleven een aantal nadelen. Het kan voorkomen dat $x(\omega)$ zoals gedefinieerd in (6.12) niet bestaat omdat $X(t)$ voor $t \rightarrow \infty$ niet tot nul nadert. Om soortgelijke redenen kan (6.13) falen. Het eerste bezwaar kan ondervangen worden door de F-transform $x(\omega)$ in een kleiner bovenhalfvlak $\text{Im } \omega > \alpha > 0$ te definieren. Aan het tweede bezwaar kan men tegemoet komen door $F(t)$ ergens in het verleden, $t < -a < 0$, af te knotten, d.w.z. door nul te vervangen.

Voorbeeld 6.2

Voor de responsiefunctie $X(t) = e^t \theta(t)$ bestaat $x(\omega) = \frac{1}{i\omega + 1}$ slechts voor $\text{Im } \omega > 1$.

Voor de responsiefunctie $X(t) = t \theta(t)$ bestaat $x(\omega) = -\omega^{-2}$ wel voor $\text{Im } \omega > 0$ maar niet voor $\text{Im } \omega = 0$.

De genoemde bezwaren, hoewel hoofdzakelijk van formele aard, doen zich in de praktijk minder gevoelen bij toepassing van Laplace transformatie. In dat geval vervangen we (6.12) en (6.13) door

$$(6.17) \quad x(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} X(t) dt,$$

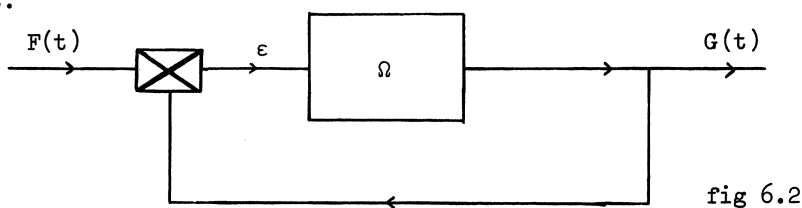
en

$$(6.18) \quad f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Stellen we aan de responsiefunctie $X(t)$ de eis $X(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$, hetgeen voor een zogenaamd stabiele werking van het filter noodzakelijk is, dan moet de Laplace transform $x(s)$ in het rechterhalfvlak $\text{Re } s > 0$ een holomorfe analytische functie zijn, d.w.z. vrij van singulariteiten zijn.

Welk formalisme men wenst te gebruiken is meer een kwestie van smaak. Hieronder bezigen we de Laplace transformatie. Later bij de discussie van ruisverschijnselen geven we de voorkeur aan Fourier transformatie.

We komen nu tot de bespreking van de voornaamste cybernetische eenheid, een servomechanisme, een systeem dat gekenmerkt wordt door terugkoppeling. In zijn eenvoudigste vorm ziet een servo er uit als in fig. 6.2.



Daarbij wordt getracht de output $G(t)$ zo goed mogelijk met de input $F(t)$ te laten overeenstemmen door het verschil $\varepsilon(t) = F(t) - G(t)$ als input op de besturingseenheid Ω te laten werken. Aldus geldt

$$\Omega(F - G) = G,$$

zodat

$$X(t) * F(t) = X(t) * G(t) + G(t).$$

Laplace transformatie geeft volgens (6.17) en (6.18)

$$x(s)f(s) = (x(s) + 1)g(s).$$

De LT van de output is dus

$$(6.19) \quad g(s) = \frac{x(s)}{x(s) + 1} f(s).$$

Het schema van fig. 6.2 kan nu vervangen worden door het veel eenvoudiger schema van fig. 6.1 waarbij het filter correspondeert met de LT $x(s)/(x(s) + 1)$.

Men zegt wel dat het schema van fig. 6.2 een regelingsproces voorstelt waarbij de input door de regelaar Ω geregeld wordt.

Voorbeeld 6.3. Proportionele regeling.

De regelaar bepaald door

$$\Omega \varepsilon(t) = \alpha \varepsilon(t),$$

waarbij α een positieve constante is, bepaalt een zgn. proportionele regeling. Blijkbaar is hierbij $x(s) = \alpha$ en geldt volgens (6.19)

$$g(s) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} f(s).$$

Dit betekent dat door deze regeling de output nooit geheel gelijk aan de input kan zijn maar er steeds een vast van α afhankelijk percentage van verschilt.

Voorbeeld 6.4. Proportionele en integrerende regeling.

Hierbij geldt

$$x(s) = \alpha + \frac{\beta}{s}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

hetgeen voor $\Omega \varepsilon(t)$ het volgende betekent

$$\Omega \varepsilon(t) = \alpha \varepsilon(t) + \beta \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau.$$

De invloed van de integrerende werking blijkt wanneer (6.19) toegepast wordt. Men heeft namelijk

$$g(s) = \frac{\beta + \alpha s}{\beta + (1 + \alpha)s} f(s).$$

Kiezen we voor $F(t)$ bijv. een eenheidsverstoring $\theta(t)$ dan kunnen we voor $g(s)$ schrijven

$$g(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\beta + (1 + \alpha)s},$$

zodat na terugtransformatie

$$G(t) = \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \alpha} \exp - \frac{\beta}{1 + \alpha} t \right\} \theta(t).$$

We constateren dat voor $t = 0$ de proportionele regeling reeds een aanpassing van output aan input levert terwijl voor $t \rightarrow \infty$ de integrerende werking er voor zorgt dat de output de input steeds nauwkeuriger imiteert.

Voor $\alpha = 0$ is er een zuiver integrerende regeling. Dan is evenwel de beginaanpassing verdwenen.

Voor het goed functioneren van een regelingsproces is het noodzakelijk dat een kleine verstoring van de input niet tot een willekeurig grote verstoring van de output leidt. We noemen dit stabiliteit. We hebben deze eis reeds boven geformuleerd voor een enkelvoudig filter. Voor een regelingsproces betekent dit eenvoudig dat de Laplace transform $x(s)/(x(s) + 1)$ in het rechterhalfvlak $\text{Re } s > 0$ vrij van singulariteiten dient te zijn. Aldus komen we tot de volgende eis voor stabiliteit.

Regel. Voor de stabiliteit van een regelingsproces is het noodzakelijk dat $x(s) + 1 \neq 0$ voor $\text{Re } s > 0$.

Voorbeeld 6.5. Proportionele, integrerende en differentierende regeling.

In de praktijk tracht men door toevoeging van een differentierende regeling, d.w.z. een regeling waarbij de regelaar onmiddellijk reageert op veranderingen van de input, een nog betere regelwerking te verkrijgen. We stellen daarbij

$$x(s) = \alpha + \beta s^{-1} + \gamma s,$$

waarbij γ de mate van differentierende regeling aangeeft. Weer volgens (6.19) geldt

$$g(s) = \left\{ 1 - \frac{s}{\beta + (1 + \alpha)s + \gamma s^2} \right\} f(s).$$

De stabiliteitseis bepaalt dat de nulpunten van de in de noemer optredende kwadratische vorm in het linkerhalfvlak dienen te liggen. Een eenvoudige analyse leert dat hieraan voor positieve coëfficiënten α , β en γ steeds voldaan is.

7. Cybernetica, vervolg

Bij de analyse van een cybernetisch systeem noodzaakt de stabiliteitseis in de regel tot een onderzoek naar de ligging van de nulpunten van een zekere analytische functie. Bij het door fig. 6.2 gegeven systeem vonden we dat de nulpunten van de in (6.19) optredende functie $x(s) + 1$ een negatief reëel deel dienden te bezitten. In het geval dat de te onderzoeken functie een polynoom is beschikt men over het volgende mooie criterium dat gewoonlijk naar Hurwitz genoemd wordt.

Stelling 7.1 (Hurwitz, 1895)

Zij $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, $a_0 > 0$ een polynoom met reële coëfficiënten. De nulpunten van $P(z)$ hebben dan en slechts dan alle een negatief reëel deel wanneer de hieronder gedefinieerde polynomen $D_1, D_2, \dots, D_n$ alle positief zijn.

$$(7.1) \quad \begin{aligned} D_1 &= a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \\ \dots, \quad D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

waarbij $a_v = 0$ voor $v > n$.

Bewijs

We beperken ons hier tot de hoofdlijnen van het bewijs zoals dit door Schur in 1921 werd gegeven. Een gedetailleerd en uitvoerig bewijs kan men o.a. vinden in Takahashi, p. 313-321. We noemen een polynoom een Hurwitz-polynoom wanneer alle nulpunten in het linkerhalfvlak liggen. Heeft het Hurwitz polynoom $P(z)$ de nulpunten $z_1, z_2, \dots, z_n$ dan vormen we hiernaast het polynoom

$$Q(z) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$$

waarvan de wortels $-z_1, -z_2, \dots, -z_n$ zijn, welke dus alle in het rechterhalfvlak liggen. De wortels van $P(z)$ en $Q(z)$ liggen symmetrisch t.o.v. de zuiver imaginaire as. We beschouwen

$$\phi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \prod_{j=1}^n \frac{(z - z_j)}{(z + \bar{z}_j)}.$$

Voor $\operatorname{Re} z < 0$ is dan $|\phi(z)| < 1$, en voor $\operatorname{Re} z > 0$ is $|\phi(z)| > 1$. Zonder moeite blijkt deze eigenschap nodig en voldoende te zijn opdat $P(z)$ een Hurwitz polynoom is.

We maken nu gebruik van de conforme afbeelding

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}$$

waarbij de zuiver imaginaire z -as overgaat in de eenheidscirkel $|w| = 1$ in het w -vlak. Voor $\operatorname{Re} z < 0$ geldt $|w| < 1$.

Hieruit volgt dat voor de functie

$$\psi(z) = \frac{P(z) + Q(z)}{P(z) - Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_2 z^{n-2} + \dots}{a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \dots}$$

het volgende geldt

$$\operatorname{Re} z < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \psi(z) < 0.$$

De polen van $\psi(z)$ liggen op de zuiver imaginaire as. Men kan vrij gemakkelijk nagaan dat deze polen enkelvoudig zijn en dat de residuen van ψ er positief zijn. We kunnen dus schrijven

$$\psi(z) = \frac{a_0}{a_1} z + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\rho_j}{z - i\beta_j}, \quad \rho_j > 0.$$

De essentiële stap in de bewijsvoering is de verwijdering van de term $a_0 z/a_1$ waarmee uit $\psi(z)$ de functie

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \frac{a_0}{a_1} z$$

ontstaat. Blijkbaar geldt de implicatie

$$\operatorname{Re} \psi(z) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \psi_1(z) < 0.$$

We gaan nu op bovenstaande wijze weer terug tot een functie $\phi_1(z)$ volgens

$$\psi_1 = \frac{\phi_1 + 1}{\phi_1 - 1}, \quad \phi_1 = \frac{\psi_1 + 1}{\psi_1 - 1}$$

zodat nu

$$\operatorname{Re} \psi_1(z) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\phi_1(z)| < 1.$$

Van $\phi_1(z)$ gaan we tenslotte terug naar een polynoom $P_1(z)$ van de graad $n-1$ volgens

$$\phi_1(z) = (-1)^n P_1(z)/P_1(-z)$$

of expliciet

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{1}{2} (2a_1 - a_0 z) P(z) + (-1)^n \frac{1}{2} a_0 z P(-z) = \\ &= a_1^2 z^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z^{n-2} + a_1 a_3 z^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

De keten van implicaties leidt tot de conclusie dat $P_1(z)$ gelijk met $P(z)$ een Hurwitz polynoom is. Daarmede is een reductie van een n^e graads polynoom tot een polynoom van de graad $n-1$ tot stand gebracht welke zo vaak herhaald kan worden totdat de graad tot nul gereduceerd is.

Er ontstaat hierbij telkens een determinant van Hurwitz als de coëfficiënt van de een na hoogste macht van z . Aldus behoort $D_1 = a_1$ bij $P(z)$ en $D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$ bij $P_1(z)$.

Voorbeeld 7.1

Voor

$$P(z) = z^3 + Az^2 + Bz + C$$

levert het Hurwitz criterium de ongelijkheden

$$(7.2) \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad AB - C > 0.$$

Voorbeeld 7.2

Voor

$$P(z) = z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$$

geldt analoog

$$(7.3) \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad D > 0, \quad (AB-C)C - A^2D > 0.$$

Ter illustratie behandelen we nu een aan de praktijk ontleend cybernetisch systeem (zie fig. 7.1) waarbij we zouden kunnen denken aan het draaien van het roer van een schip, een zwaar karwei dat op onze aanwijzingen uitgevoerd wordt door krachtige machines. Onze aanwijzingen, de input, komen neer op het instellen van een hoekvariabele ϕ bepaald door het draaien van een wijzer, of een lichtlopend stuurwiel. De stand van het roer wordt gegeven door een hoekvariabele ψ . Het verschil $\epsilon = \phi - \psi$ is de input van de servoapparatuur welke als $\Omega\epsilon$ een koppel levert dat onder een weerstand F een last J aandrijft. Er geldt nu de differentiaalvergelijking

$$(7.4) \quad \Omega\epsilon = J \frac{d^2\psi}{dt^2} + F \frac{d\psi}{dt}.$$

Laplace transformatie geeft

$$x(s) (\bar{\phi} - \bar{\psi}) = (s^2 J + sF) \bar{\psi},$$

zodat

$$\bar{\psi} = \frac{x(s)}{s^2 J + sF + x(s)} \bar{\phi}.$$

Kiezen we een servo van het type

$$(7.6) \quad x(s) = \alpha + \beta s^{-1} + \gamma s,$$

dan treedt in het rechterlid een noemer op van de vorm

$$(7.7) \quad s^3 J + s^2 (F + \gamma) + s\alpha + \beta.$$

Passen we hierop het stabiliteitscriterium van Hurwitz toe dan is het

systeem stabiel als

$$(7.8) \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad F + \gamma > 0 \quad \text{en} \quad \alpha(F + \gamma) > \beta J.$$

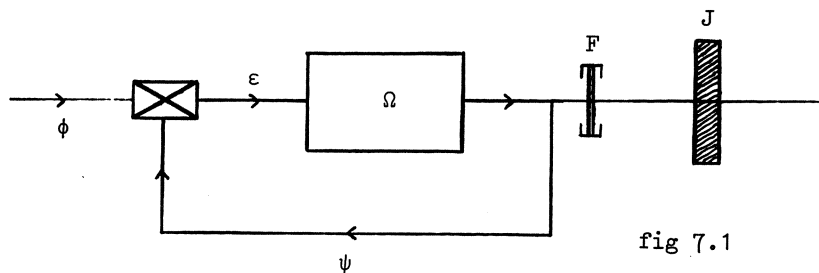


fig 7.1

Een belangrijke klasse van cybernetische systemen wordt gevormd door de o.a. in de chemische industrie voorkomende automatisch geregelde processen. In principe gaat het er om een bedrijfsgrrootheid als temperatuur of druk zo goed mogelijk constant te houden. Treedt ergens in het systeem een storing op dan dient door de gecombineerde werking van proces en regelaar de storing opgeheven te worden.

In het eenvoudigste geval ziet het systeem er uit als in fig. 7.2.

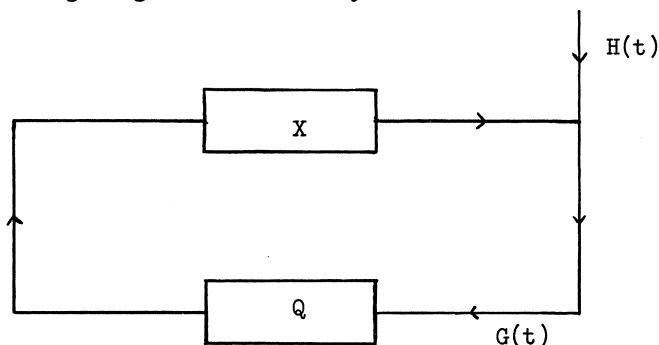


fig 7.2

We onderscheiden het proces met de responsiefunctie $X(t)$ en de regelaar met de responsiefunctie $-Q(t)$ welke functies dus beide corresponderen met een input $\delta(t)$.

We nemen aan dat de in de figuur optredende bedrijfsfunctie $G(t)$ op nul gehouden moet worden en dat een storing $H(t)$ het systeem beïnvloedt.

Uit de figuur lezen we af

$$(7.9) \quad H(t) - X(t) * Q(t) * G(t) = G(t).$$

Laplace transformatie geeft

$$h(s) - x(s)q(s)g(s) = g(s),$$

zodat

$$(7.10) \quad g(s) = \frac{1}{1 + x(s)q(s)} h(s).$$

Een goed functioneren van de regeling vereist stabiliteit. Evenals bij het vroeger beschouwde systeem betekent dit weer dat de nulpunten van

$$(7.11) \quad x(s)q(s) + 1 = 0$$

in het linkerhalfvlak moeten liggen.

Er zijn veel mogelijkheden voor de procesresponsie. De gevallen die voor de praktijk het belangrijkste zijn vermelden we hieronder, waarbij we telkens zowel de responsie $R(t)$ van het proces op een eenheidsverstoring $\theta(t)$ aangeven als de Laplace transform $x(s)$ van de procesresponsiefunctie $X(t)$, behorend bij een instantane verstoring $\delta(t)$. Hierbij is natuurlijk $X(t) = R'(t)$.

a. Processen met zelfregulering, $R(t) \rightarrow 1$ voor $t \rightarrow \infty$.

$$1. R(t) = 1 - e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right),$$

$$x(s) = (s + 1)^{-m}.$$

$$2. R(t) = (1 - \exp -(t - t_0))\theta(t - t_0), \text{ een proces met een vertragingstijd } t_0.$$

$$x(s) = e^{-st_0} (s + 1)^{-1}.$$

$$3. R(t) = \theta(t - t_0),$$

$$x(s) = e^{-st_0}.$$

b. Processen zonder zelfregulering.

$$1. R(t) = \int_0^t \left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{1!} + \frac{\tau^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \exp - \tau \right) d\tau \right).$$

$$x(s) = s^{-1} (s + 1)^{-m}.$$

$$2. R(t) = (t - t_0) \theta(t - t_0).$$

$$x(s) = s^{-1} e^{-st_0}.$$

Voor de praktijk is het probleem belangrijk om bij een gegeven proces een optimale regelaar te bepalen. Het begrip "optimaal" kan al naar de omstandigheden verschillend opgevat worden. Men zou kunnen eisen dat de responsie $G(t)$ voor een zeker type storing $H(t)$ minimaal is in de zin van

$$\max_{t>0} |G(t)| = \text{minimum}.$$

Even zinvol en wiskundig beter hanteerbaar is de eis

$$(7.12) \quad \int_0^\infty G^2(t) dt = \text{minimum}.$$

Voor de toepassing van (7.12) is het niet nodig om $G(t)$ te kennen omdat we deze voorwaarde gemakkelijk kunnen herleiden tot een vorm waarin de Laplace transform $g(s)$, meestal een eenvoudiger functie, voorkomt. We nemen aan dat $g(s)$ bestaat voor zuiver imaginaire s , zeg $s = iu$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty G(t) dt \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} g(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty g(iu) du \int_0^\infty e^{iut} G(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty g(iu) g(-iu) du. \end{aligned}$$

We kunnen (7.12) dus vervangen door

$$(7.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(iu)g(-iu)du = \text{minimum}.$$

Voorbeeld 7.3

We kiezen een procesregeling met $x(s) = (s + 1)^{-1}$ en $q(s) = \alpha + \beta/s$. Het probleem is α en β zo gunstig mogelijk te kiezen binnen de fysische begrenzing $\alpha \leq \alpha_0$, $\beta \leq \beta_0$.

Uit (7.10) volgt voor een eenheidsverstoring $H(t) = \theta(t)$

$$g(s) = \frac{s + 1}{s(s + 1) + \alpha s + \beta}.$$

De polen van $g(s)$ liggen voor $\alpha > 0$ en $\beta > 0$ reeds in het linkerhalfvlak zodat het systeem alvast stabiel is. We passen nu het criterium (7.13) toe. De integraal kan vrij gemakkelijk met behulp van residu-rekening uitgerekend worden door u als een complexe variabele op te vatten. Heeft $g(s)$ de polen s_1 en s_2 dan heeft $g(iu)g(-iu)$ de polen $\pm is_1$ en $\pm is_2$ (zie fig. 7.3).

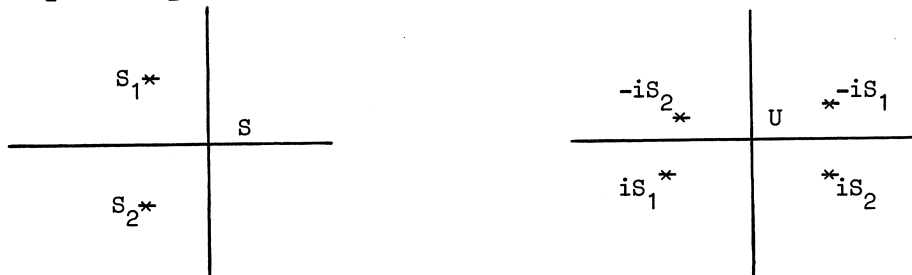


fig 7.3.

Het linkerlid van (7.13) is dus equivalent met

$$g(-s_1) \operatorname{Res}_{s=s_1} g(s) + g(-s_2) \operatorname{Res}_{s=s_2} g(s).$$

Een eenvoudige berekening leidt dan tot

$$\frac{1 + \beta}{\beta(1 + \alpha)} = \text{minimum}.$$

8. Ruis

By cybernetische systemen heeft men veel te maken met kleine min of meer toevallige storingen. In het bijzonder denken we aan het optreden van ruis bij electronische systemen. In het onderstaande schema bestaat de input uit een informatie dragend signaal $F(t)$ en een ruisfunctie $N(t)$. Men wordt nu voor het probleem gesteld uit de output $\Omega(F + N)$ het ruisgedeelte zo goed mogelijk te elimineren.

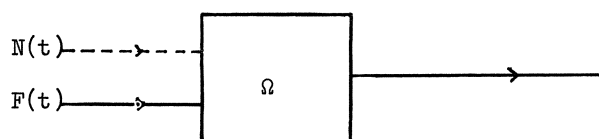


fig 8.1

Een ruisfunctie $N(t)$ kunnen we ons voorstellen als een voor $-\infty < t < \infty$ gedefinieerde continue tijdfunctie.

Afhankelijk van het gekozen mathematische model kunnen we nog verder gaande beperkingen opleggen als differentieerbaarheid of uniforme begrensdheid. Alle voor het doel relevante ruisfuncties vatten we samen in een verzameling V , of in de terminologie van de statistische mechanica wel ensemble genoemd. We nemen aan dat we met betrekking tot V statistische grootheden kunnen vormen als bijv. het gemiddelde van $F(t)$ voor $t = t_0$, geschreven als

$$A_F^V F(t_0).$$

Een verzameling V van ruisfuncties heet stationnair wanneer de bij een bepaalde tijd $t = t_0$ behorende over V gemiddelde statistische grootheden onafhankelijk van t_0 zijn. Elk element van een dergelijke V heet een stationnaire ruisfunctie of een stationnaire tijdreeks.

Beschouwen we een zekere stationnaire ruisfunctie $F(t)$ gekozen uit een ensemble V dan kunnen we ook statistische grootheden vormen door over de tijd t te middelen. Geldt nu i.h.b.

$$(8.1) \quad A_F^V F(t) = A_t^V F(t),$$

zodat ensemblegemiddelde en tijdgemiddelde overeenstemmen, dan heet V ergodisch en heet $F(t)$ een ergodische stationnaire tijdreeks.

De eigenschap (8.1) heet de ergodische eigenschap. Een enkel exemplaar van een ergodische stationnaire ruisfunctie bevat m.a.w. reeds alle in V aanwezige statistische informatie.

In de praktijk waar men in de regel slechts beschikt over een enkele concrete realisatie $F(t)$ van ruis, en dan nog over een beperkt tijd-interval, neemt men gewoonlijk aan dat de ruis zowel stationnair als ergodisch is. Men kan dan $F(t)$ op een of andere wijze, bijv. periodiek, naar verleden en toekomst extrapoleren.

Van belang naast het gemiddelde

$$(8.2) \quad A_t V F = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(\tau) d\tau$$

is vooral de zgn. autocorrelatiefunctie $\phi(t)$ gedefinieerd als

$$(8.3) \quad \phi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F^*(\tau) F(\tau+t) d\tau,$$

waarin $F^*(\tau)$ de complex toegevoegde van $F(\tau)$ voorstelt.

Voorbeeld 8.1

Een klasse V van ruisfuncties wordt gevormd door de functies $F(t) = c \sin(\omega t + \alpha)$ waarbij c en ω constanten zijn en α , de fase, willekeurig is. Middelen over V betekent dus middelen over alle fasen $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Gemakkelijk blijkt $A_F V F(t) = 0$ voor elke t . Anderzijds is ook

$$A_t V F(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega \tau + \alpha) d\tau = 0$$

zodat V de ergodische eigenschap bezit.

Een eenvoudige berekening geeft

$$\phi(t) = \frac{1}{2} c^2 \cos \omega t,$$

d.w.z. een zuivere faseloze harmonische oscillatie.

Voorbeeld 8.2

Analoog beschouwen we een mengsel van twee sinusfuncties

$$F(t) = c_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + c_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

waarbij de fasen α_1 en α_2 willekeurig zijn.

Wederom bezit de verzameling de ergodische eigenschap. We vinden hier

$$\phi(t) = \frac{1}{2} c_1^2 \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} c_2^2 \cos \omega_2 t.$$

Algemener behoort bij

$$F(t) = \sum c_k \sin(\omega_k t + \alpha_k), \quad \alpha_k \text{ toevallig,}$$

de autocorrelatiefunctie

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \sum c_k^2 \cos \omega_k t.$$

Voorbeeld 8.3

De ergodische ruis bepaald door $F(t) = \sin \sqrt{|t|}$ heeft als autocorrelatiefunctie

$$\phi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\sqrt{\tau}) \sin(\sqrt{\tau+t}) d\tau \quad \text{voor } t \geq 0.$$

Herleiding geeft

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\sqrt{\tau+t} - \sqrt{\tau}) d\tau - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\sqrt{\tau+t} + \sqrt{\tau}) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(\sqrt{\tau T + t} - \sqrt{\tau T}) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos 0 d\tau = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

zodat

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \quad \text{voor alle } t.$$

Bij sommige beschouwingen is het prettig met complexe ruisfuncties $F(t)$ te werken. De autocorrelatiefunctie $\phi(t)$ wordt dan iets algemener

gedefinieerd als

$$(8.4) \quad \phi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F^*(\tau) F(t + \tau) d\tau.$$

Algemeen geldt nu de eigenschap

Stelling 8.1

$$\phi(-t) = \phi^*(t)$$

$$\phi(0) \text{ is reëel en } \phi(0) \geq |\phi(t)|.$$

Bewijs

Het eerste deel van de stelling volgt onmiddellijk uit de definitie. We bewijzen nu de gestelde ongelijkheid door gebruik te maken van de bekende ongelijkheid van Schwarz.

$$\begin{aligned} |\phi(t)|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \left| \int_{-T}^T F^*(\tau) F(\tau + t) d\tau \right|^2 \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T |F(\tau)|^2 d\tau \int_{-T}^T |F(\tau + t)|^2 d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \left\{ \int_{-T}^T |F(\tau)|^2 d\tau \right\}^2 = \phi^2(0). \end{aligned}$$

Het verdwijnen van de variabele t bij de laatste stap is gemotiveerd door het stationnaire karakter van F .

Voorbeeld 8.4

Voor $F(t) = c_1 e^{-i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_2 t}$ met complexe c_1 en c_2 vinden we zonder moeite

$$\phi(t) = |c_1|^2 e^{-i\omega_1 t} + |c_2|^2 e^{-i\omega_2 t}.$$

Men noemt $\phi(0)$, het gemiddelde van $|F(t)|^2$, het vermogen van de ruisfunctie, of beter het gemiddeld vermogen. De ruisfunctie

$$(8.5) \quad F(t) = \sum c_k \exp - i\omega_k t,$$

een algemenere versie van voorbeeld 8.4, heeft het gemiddeld vermogen

$$(8.6) \quad \phi(0) = \sum |c_k|^2.$$

De autocorrelatiefunctie is

$$(8.7) \quad \phi(t) = \sum |c_k|^2 \exp - i\omega_k t.$$

Vormen we formeel de complexe Fourier transform volgens

$$(8.8) \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \phi(t) dt$$

dan levert dit, in de notatie van de theorie van de gegeneraliseerde functies,

$$(8.9) \quad \Phi(\omega) = 2\pi \sum |c_k|^2 \delta(\omega - \omega_k),$$

d.w.z. een discreet lijnenspectrum.

Men kan de bovenstaande beschouwingen aanmerkelijk generaliseren zoals Wiener reeds gedaan heeft.

De algemene gang van zaken bij de analyse van een ruisfunctie is a.v. Men bepaalt zo goed mogelijk de autocorrelatiefunctie $\phi(t)$ en vervolgens diens F-transform volgens (8.8). Men vindt aldus binnen zekere grenzen van nauwkeurigheid het spectrum van de in de ruis aanwezige frequenties.

Omgekeerd is het mogelijk door uit te gaan van een gegeven ruis-spectrum $\Phi(\omega)$ een ruisfunctie te synthetiseren door aan de frequenties willekeurige fasen toe te voegen.

Voor de praktijk is van belang de zogenaamde witte ruis, welke gekenmerkt is door het "blok"spectrum

$$(8.10) \quad \Phi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor } -a < \omega < a \\ 0 & \text{voor } |\omega| > a. \end{cases}$$

De autocorrelatiefunctie is

$$(8.11) \quad \phi(t) = \frac{\sin at}{\pi t}.$$

De in de praktijk voorkomende autocorrelatiefuncties kunnen vaak benaderd worden door het model

$$(8.12) \quad \phi(t) = \frac{1}{2} a e^{-b|t|} \cos ct.$$

Het spectrum is

$$(8.13) \quad \phi(\omega) = ab \frac{\omega^2 + b^2 + c^2}{\{(\omega + c)^2 + b^2\} \{(\omega - c)^2 + b^2\}}.$$

Soms doet zich het probleem voor dat twee ruisfuncties $F(t)$ en $G(t)$ met elkaar vergeleken moeten worden. Daartoe bedient men zich van de correlatiefunctie (cross correlation)

$$(8.14) \quad \phi_{FG}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F^*(\tau) G(t + \tau) d\tau.$$

In het algemeen zijn ϕ_{FG} en ϕ_{GF} verschillend, maar geldt wel

$$(8.15) \quad \phi_{GF}(t) = \phi_{FG}^*(-t).$$

Soms schrijven we $\phi(F, G)$ i.p.v. ϕ_{FG} indien F en G zelf weer uit andere functies samengesteld zijn.

Is $F(t)$ een informatie dragende input-functie en $N(t)$ een ruisfunctie dan is de correlatie ϕ_{FN} nul, zoals eenvoudig ingezien kan worden. Later maken we gebruik van de volgende eenvoudig te verifiëren regels, geformuleerd voor reële functies.

$$(8.16) \quad \phi(A, B * C) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{AB}(t - \tau) C(\tau) d\tau.$$

$$(8.17) \quad \phi(A * B, A * B) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{AA}(t + \sigma - \tau) B(\sigma) B(\tau) d\sigma d\tau.$$

9. Probleem van Wiener

Door N. Wiener werd het probleem gesteld om voor een ruisfunctie $F(t)$ van een gegeven type, d.w.z. met een bekende autocorrelatiefunctie, een operator Ω zo te bepalen dat de output $\Omega F(t)$ gemiddeld een zo goed mogelijke benadering is van $F(t + h)$ voor $h > 0$. Populair gesproken moet dus een optimale voorspellingsoperator gevonden worden. Het is plausibel dat men op grond van de kennis van $F(t)$ voor het verleden $t < 0$ en van de statistische eigenschappen van $F(t)$ een redelijke voorspelling kan doen over het gedrag van deze functie op een later tijdstip $t + h$. Optimale benadering wil zeggen

$$(9.1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\Omega F(t) - F(t + h)|^2 dt = \text{minimum}.$$

Is Ω bepaald door de delta-responsie $X(t)$ dan is

$$\Omega F(t) = \int_0^\infty F(t - \tau) X(\tau) d\tau.$$

Uit (9.1) volgt door gebruik te maken van (8.3) en (8.17)

$$(9.2) \quad \phi(0) - 2 \int_0^\infty \phi(h + \tau) X(\tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(\sigma - \tau) X(\sigma) X(\tau) d\sigma d\tau = \text{minimum}.$$

Het linkerlid van (9.2) is een kwadratische functionaal van een in de variatierekening veelvuldig voorkomend type, waaruit $X(t)$ bepaald moet worden.

Volgens de gebruikelijke techniek nemen we aan dat in (9.2) de functie $X(t)$ reeds de gezochte is. De minimumvoorwaarde betekent nu dat voor naburige functies $X(t) + \varepsilon Z(t)$, waarbij ε een (kleine) variabele parameter en $Z(t)$ een willekeurige functie is, de uitdrukking (9.2), nu een kwadratische functie van ε , voor $\varepsilon = 0$ minimaal is. Dat wil zeggen dat de term met ε nul moet zijn. Substitutie geeft voor deze lineaire term

$$\int_0^\infty \{-\phi(h + \tau) + \int_0^\infty \phi(\sigma - \tau) X(\sigma) d\sigma\} Z(\tau) d\tau$$

welke uitdrukking moet verdwijnen voor alle keuzen van $Z(t)$. Volgens het fundamentele lemma van de variatierekening mogen we dan concluderen dat

$$(9.3) \quad \phi(h+t) = \int_0^\infty \phi(t-\tau)X(\tau)d\tau,$$

geldig voor $t > 0$.

Deze integraalvergelijking wordt gewoonlijk naar Wiener genoemd en behoort tot een klasse van integraalvergelijkingen welke tegenwoordig als het Wiener-Hopf type wordt aangeduid.

De moeilijkheid is dat (9.3) slechts voor $t > 0$ geldt. Was de vergelijking waar voor alle t dan zou men zonder problemen door een Laplace of Fourier transformatie de convolutie tot een gewoon product hebben kunnen reduceren. Nu kan dit niet meer.

Wiener heeft evenwel een fraaie truc bedacht om het geschetste plan toch te doen slagen.

De essentiële stap is de zgn. factorisatie van $\phi(t)$ als convolutie van een toekomst-functie en een verleden-functie volgens

$$(9.4) \quad \phi(t) = \psi^+(t) * \psi^-(t) = \int_{-\infty}^0 \psi^+(t-\tau) \psi^-(\tau)d\tau,$$

waarbij

$$(9.5) \quad \begin{cases} \psi^+(t) = 0 & \text{voor } t < 0 \\ \psi^-(t) = 0 & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

Substitutie in (9.3) geeft

$$\int_{-\infty}^0 \psi^+(h+t-\tau)\psi^-(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 \psi^-(\tau)d\tau \int_0^\infty \psi^+(t-\tau-\sigma)X(\sigma)d\sigma,$$

waaraan stellig voldaan is als

$$\psi^+(h+t-\tau) = \int_0^\infty \psi^+(t-\tau-\sigma)X(\sigma)d\sigma.$$

Vervangen we $t - \tau$ door s dan is wederom een integraalvergelijking van het type (9.3) ontstaan

$$(9.6) \quad \psi^+(h+s) = \int_0^\infty \psi^+(s-\sigma)X(\sigma)d\sigma.$$

Er is alleen dit belangrijke verschil dat wegens (9.5) de bovengrens in de integraal in het rechterlid in feite s is i.p.v. ∞ . Dit maakt dat Fourier transformatie wel uitvoerbaar is. Volgens de convolutiestelling geldt

$$(9.7) \quad \int_0^\infty e^{i\omega s} \psi^+(h+s)ds = x(\omega) \int_0^\infty e^{i\omega s} \psi^+(s)ds,$$

waarbij $x(\omega)$ door (6.12) gegeven wordt.

Hieruit volgen dus $x(\omega)$ en $X(t)$ zodra $\psi^+(t)$ bekend is. Alles hangt af van de factorisatie (9.4).

Passen we op (9.4) complexe Fourier transformatie toe dan volgt wegens de convolutiestelling

$$(9.8) \quad \phi(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} \phi(t)dt = \int_0^\infty e^{i\omega t} \psi^+(t)dt \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} \psi^-(t)dt,$$

of met een voor de hand liggende notatie

$$(9.9) \quad \phi(\omega) = \Psi^+(\omega) \Psi^-(\omega).$$

Volgens het besprokene aan het eind van §5 zijn ϕ , Ψ^+ en Ψ^- analytische functies van w waarbij $\Psi^+(w)$ in het bovenhalfvlak $\text{Im } w > 0$ vrij van singulariteiten is en $\Psi^-(w)$ vrij van singulariteiten is in het benedenhalfvlak. De genoemde factorisatie is derhalve op eenvoudige wijze te bewerkstelligen indien bijvoorbeeld $\phi(w)$ een quotiënt is van twee polynomen met polen verdeeld over boven- en benedenhalfvlak.

Voorbeeld 9.1

Voor een ruis met de autocorrelatiefunctie $\phi(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$ geldt $\phi(w) = (w^2 + 1)^{-1}$ volgens (8.12) en (8.13).

De factorisatie is eenvoudigweg

$$\Psi^+(w) = i(w + i)^{-1}, \quad \Psi^-(w) = -i(w - i)^{-1}$$

waaruit zonder moeite

$$\psi^+(t) = e^{-t} \theta(t)$$

volgt.

De betrekking (9.7) levert tenslotte $x(w) = e^{-h}$, een voor de praktijk overigens weinig boeiend resultaat.

Voorbeeld 9.2

De ruis met $\phi(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|} (\sin|t| + \cos|t|)$ levert

$$\phi(w) = \frac{4}{w^4 + 4} = \frac{4}{(w + 1 + i)(w - 1 + i)(w + 1 - i)(w - 1 - i)},$$

zodat bijv.

$$\Psi^+(w) = \frac{-1}{(w + 1 + i)(w - 1 + i)}.$$

Hieruit volgt

$$\psi^+(t) = e^{-t} \sin t \theta(t).$$

Substitutie in (9.7) leidt tot het resultaat

$$x(w) = e^{-h} (\cos h + \sin h - i w e^{-h} \sin h)$$

iets interessanter dan in het vorige voorbeeld omdat hierin een differentierende werking optreedt.

Als laatste toepassing van de methode van Wiener beschouwen we het schema 9.1 van een servomechanisme waarbij ruis optreedt.

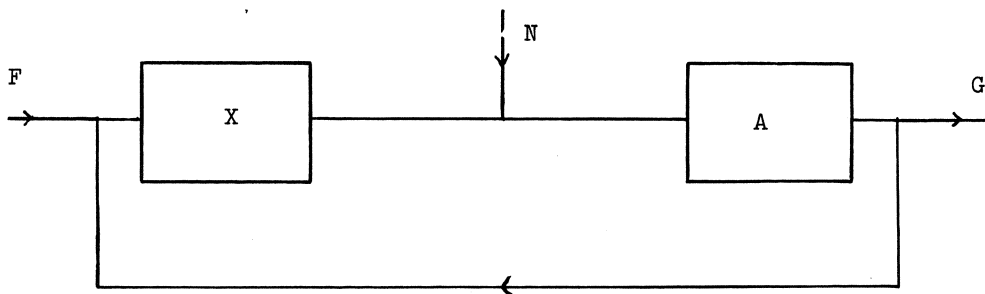


fig 9.1

Hierbij is A een gegeven filter met responsie $A(t)$, X een te bepalen corrigerend filter met responsie $X(t)$ en $N(t)$ een ruisfunctie.

Levert de input $F(t)$ tenslotte de output $G(t)$ dan kunnen we uit het schema de volgende vergelijking aflezen

$$(9.10) \quad (F - G) * X * A + N * A = G.$$

Hieruit kunnen we zonder moeite afleiden

$$(F - G) * Y = F - N * A$$

waarbij

$$Y = \delta(t) + X * A.$$

In termen van Fourier transformatie betekent dit

$$(9.11) \quad f(w) - g(w) = l(w)z(w),$$

waarbij

$$l(w) = f(w) - n(w)a(w)$$

en

$$z(w) = \{1 + x(w)a(w)\}^{-1}.$$

De inverse van (9.11) is

$$(9.12) \quad F(t) - G(t) = L(t) * Z(t).$$

Hierbij moeten we natuurlijk eisen dat $Z(t) \equiv 0$ voor $t < 0$ aangezien de operator slechts op het verleden mag werken. Optimale filterwerking wordt bereikt als

$$(9.13) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F(t) - G(t)|^2 dt = \text{minimum}.$$

Uitwerking van deze voorwaarde geeft

$$\phi(L * Z, L * Z) = \text{minimum}.$$

Volgens (8.17) betekent dit dat

$$(9.14) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_{LL}(\sigma - \tau) Z(\sigma) Z(\tau) d\sigma d\tau = \text{minimum}.$$

De autocorrelatiefunctie ϕ_{LL} kunnen we herleiden tot

$$\phi_{LL}(t) = \phi_{FF}(t) + \phi(N * A, N * A),$$

of

$$(9.15) \quad \phi_{LL}(t) = \phi_{FF}(t) + \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_{NN}(t + \sigma - \tau) A(\sigma) A(\tau) d\sigma d\tau,$$

waarbij gebruik gemaakt is van de veronderstelling dat ruis en input niet gecorreleerd zijn.

Passen we op (9.15) weer de principes van de variatierekening toe dan moet voor een optimale Z de volgende betrekking gelden

$$(9.16) \quad \int_0^\infty \phi_{LL}(t - \tau) Z(\tau) d\tau = 0 \quad \text{voor} \quad t > 0.$$

Dit is wederom een integraalvergelijking van het Wiener-Hopf type.

In dit geval is de discussie eenvoudig. Het is voldoende op te merken dat de complexe Fourier transform van het linkerlid van (9.17) van het type $\Psi^-(w)$ is, d.w.z. vrij van singulariteiten in het benedenhalfvlak. Volgens de convolutiestelling is deze complexe F-transform gelijk aan

$$\phi_{LL}(w) z(w).$$

Substitutie van (9.16) levert hiervoor

$$(9.17) \quad \{ \phi_{FF}(w) + a(w) a(-w) \phi_{NN}(w) \} z(w).$$

De vorm van $z(w)$ dient dus zodanig te zijn dat de eventuele polen van de uitdrukking tussen accolades welke in het benedenhalfvlak liggen door nulpunten van $z(w)$ geneutraliseerd worden.

Voorbeeld 9.3

Kies $A(t) = e^{-\lambda t} \theta(t)$, $\phi_{FF}(t) = \pi e^{-|t|}$ en $\phi_{NN} = \varepsilon^2 \delta(t)$ (witte ruis). Het linkerlid van (9.17) wordt

$$\left(\frac{1}{1+w^2} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2 + w^2} \right) z(w).$$

Het is duidelijk dat $z(w)$ de polen bij $w = -i$ en $w = -\lambda i$ moet neutraliseren. Anderzijds mag $z(w)$ zelf geen polen in het benedenhalfvlak bezitten.

In aanmerking komt bijv.

$$z(w) = \frac{(w+i)(w+\lambda i)}{w \sqrt{1-\varepsilon^2} - i\varepsilon}.$$

Voor een meer gedetailleerde uitwerking van dit en soortgelijke problemen en voor concrete toepassingen verwijzen we naar de literatuur.

Literatuur

- T. Takahashi, Mathematics of automatic control,
Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- N. Wiener, Cybernetics,
Wiley, 1948.
- N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of
stationary time series,
Wiley, 1949.
- R.V. Churchill, Operational mathematics, sec. ed.,
McGraw-Hill, 1958.
- A. Papoulis, The Fourier integral and its applications,
McGraw-Hill, 1962.
- R.R. Goldberg, Fourier transforms,
Cambridge University Press, 1961.
- G. Doetsch, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-
Transformation,
Birkhäuser Verlag, 1958.

Tabel van Laplace transforms

$\frac{1}{s}$	$\theta(t)$
$\frac{1}{s^{1+\mu}}$	$\frac{t^\mu}{\Gamma(1+\mu)}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s} \ln \frac{1}{s}$	$(\gamma + \ln t)$
$\frac{1}{\sqrt{s}} \exp - b\sqrt{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{b^2}{4t}$
$\frac{1}{s} \exp - b\sqrt{s}$	$\operatorname{erfc} \frac{b}{2\sqrt{t}}$
$\exp - b\sqrt{s}$	$\frac{a}{2t\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{b^2}{4t}$
$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + a)}$	$\operatorname{erfc} a\sqrt{t} \exp a^2 t$
$e^{a^2 s^2} \operatorname{erfc} as$	$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp - \frac{t^2}{4a^2}$
$\frac{\exp - b\sqrt{s}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + a)}$	$\operatorname{erfc}(a\sqrt{t} + \frac{b}{2\sqrt{t}}) \exp(a^2 t + ab)$
$e^{-s} I_0(s)$	$\frac{1}{\pi} (2t - t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\theta(t) - \theta(t-2)\}$
$e^s K_0(s)$	$(2t + t^2)^{-\frac{1}{2}}$
$s^{-3/4} \exp - b\sqrt{s}$	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{b}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp - \frac{b^2}{8t} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8t}\right)$

Index

asymptotische eigenschap		,convergentie van	32 ^a
van een machtreeks	23		
autocorrelatiefunctie	49,51	gelijkvormigheidsregel	3
		Green, functie van	9
bedrijfsfunctie	44		
beeld	1	Hurwitz, (stabiliteits-)criterium	40,43
		van	
begrensde variatie	1,2	,determinanten van	42
begrenzing, exponentiële	2	Hurwitz-polynoom	40
,t-macht	2		
Besselfunctie, gemodificeerde	25	ingangsgrootheid	33
blokspectrum	52	input	33
		input-output schema	35
convolutie	4,31,34	integratieregels	4
convolutieregel	4		
correlatiefunctie	53	Jordan, stelling van	31
cross correlation	53		
		Laplace getransformeerde	1
differentiatieregels	3	Laplace transform (LT)	1
Dirac, (-) functie van	34	,convergentie van	2
		Laplace paar	5
eenheidssprongfunctie	3		
ensemble	48	magic box	33
ensemblegemiddelde	49		
ergodische eigenschap	49	Newton, stralingsvoorwaarde van	18
Euler, constante van	1		
		omkeerformule	5,31
factorisatie	55	origineel	1
filter	33,36	output	33
,stabiele werking van	36 ^b		
filterfunctie	36	Parseval, gelijkheid van	32
filterwerking	36 ^a		
Fourier getransformeerde	30	regelaar	37

Fourier operator	30
Fourier transform (FT)	30
, en integrerende	37
, ,	
en differentiërende	38
regelingsproces	37
, stabiliteit van	38
responsie	35
ruisfunctie	48
, gemiddeld vermogen	51
van	
Schur	40
servo-mechanisme	36 ^b
stationnaire ruisfunctie	48
stationnaire tijdreeks	48
stationnaire verzameling	48
Sturm-Lionville probleem	19
terugkoppeling	36 ^b
toekomstfunctie	55
tijd gemiddelde	49
uitgangsgrootheid	33
unit	33
verledenfunctie	55
verschuivingsregels	3
vertragingstijd	45
Wiener	52
,integraalvergelijking	55
van	
Wiener-Hopf, vergelijking van	55
zaagtandfunctie	7
zelfregulering	45

,optimale	46
regeling, proportionele	37

